



Politecnico di Bari

Repository Istituzionale dei Prodotti della Ricerca del Politecnico di Bari

Comportamento dinamico di strutture curve in muratura: modellazione e sperimentazione su modelli in scala

This is a PhD Thesis

Original Citation:

Comportamento dinamico di strutture curve in muratura: modellazione e sperimentazione su modelli in scala / Elia, Isabella. - ELETTRONICO. - (2021). [10.60576/poliba/iris/elia-isabella_phd2021]

Availability:

This version is available at <http://hdl.handle.net/11589/226742> since: 2021-06-08

Published version

Politecnico di Bari
<http://hdl.handle.net/11589/226742>
DOI: 10.60576/poliba/iris/elia-isabella_phd2021

Terms of use:

Altro tipo di accesso

(Article begins on next page)



**Politecnico
di Bari**

Dipartimento di Scienze dell'Ingegneria Civile e dell'Architettura

CORSO DI DOTTORATO:
CONOSCENZA E INNOVAZIONE NEL PROGETTO PER IL PATRIMONIO

SSD: ICAR/08–SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Tesi di Dottorato

**Comportamento dinamico di strutture curve in muratura:
modellazione e sperimentazione su modelli in scala**

Dottoranda:
Isabella Elia

Relatori:
Prof. Mario Daniele Piccioni
Prof. Aguinardo Fraddosio

Coordinatore del Corso di Dottorato:
Prof. Carlo Moccia

XXXIII Ciclo, 01/11/2017-31/03/2021

INDICE

ABSTRACT	3
CAPITOLO 1 INTRODUZIONE	4
1.1 Contesto globale	5
1.2 Obiettivi della ricerca	7
1.3 Struttura della tesi	8
CAPITOLO 2 STATO DELL'ARTE	9
2.1 Evoluzione storico-tipologica delle strutture ad arco	9
2.2 Breve rassegna storica della teoria della meccanica dell'arco in muratura	17
2.3 Muratura come materiale non reagente a trazione (NRNT)	28
2.3.1 Modello di Heyman	28
2.3.2 I sistemi murari monodimensionali: stati di sollecitazione compatibili ...	31
2.3.3 Modello a blocchi rigidi per lo studio delle strutture in muratura	36
2.3.4 Teoremi dell'analisi limite.....	42
CAPITOLO 3 COMPORTAMENTO DINAMICO DELLE STRUTTURE IN MURATURA	49
3.1 Risposta sismica per una struttura continua: l'oscillatore semplice	51
3.2 Dinamica delle strutture a blocchi: il rocking.....	54
3.2.1 La risonanza nelle strutture rocking	58
3.3 Considerazioni sulla risposta sismica dei due oscillatori.....	62
3.4 Archi in muratura soggetti a moti alla base	65
3.5 Test dinamici su archi in muratura	69
3.5.1 Prove dinamiche su modelli in scala reale.....	69
3.5.2 Prove dinamiche su modelli in scala ridotta	71

CAPITOLO 4 UN NUOVO MODELLO PER TEST DINAMICI SU ARCHI IN SCALA ...	77
4.1 Esplicitazione del modello analitico per archi in muratura	77
4.2 Progettazione del nuovo sistema di interfaccia.....	86
4.3 Stereotomia del sistema di interfaccia	87
4.3.1 Progettazione dei punti di incernieramento	90
CAPITOLO 5 APPLICAZIONI E PROVE SPERIMENTALI.....	92
5.1 Modelli di archi in scala ridotta.....	92
5.2 Layout dell'apparato sperimentale.....	99
5.2.1 Sistema di eccitazione e controllo dei segnali	100
5.2.2 Fattore di scala.....	101
5.3 Prova di tilting	106
5.4 Prova dinamica	108
5.5 Analisi dei dati.....	111
5.5.1 Dominio di rottura <i>Modello A</i>	111
5.5.2 Dominio di rottura <i>Modello B</i>	112
CAPITOLO 6 CONCLUSIONI	115
6.1 Riflessione sui risultati ottenuti	115
6.2 Applicazioni future	116
BIBLIOGRAFIA	117
NOTAZIONI	123

ABSTRACT

I recenti eventi sismici hanno mostrato che le strutture in muratura risultano vulnerabili ai terremoti e, nonostante vi sia un crescente interesse scientifico verso questo tema, la loro valutazione sismica rimane ancora oggi una sfida.

Questo lavoro quindi si aggancia agli studi sul comportamento dinamico delle strutture curve in muratura ed intende proporre, sulla base di un approccio teorico appropriato, una nuova strategia sperimentale che utilizza modelli in scala ridotta capaci di riprodurre le condizioni specifiche che caratterizzano la dinamica di strutture reali. Cogliere la dinamica delle costruzioni in muratura, specie quelle di carattere storico, è particolarmente complesso in quanto richiede il ricorso a teorie non lineari che vanno sotto il nome di teorie del *rocking*.

In questo studio la dinamica del *rocking* descritta da Housner e approfondita da Oppenheim, per il caso specifico degli archi costituiti da blocchi, è inquadrata nelle metodologie di analisi che considerano il materiale muratura come materiale “Non Resistente a Trazione”, un modello meccanico che traduce in chiave razionale le ipotesi di Heyman.

La proposta poi di un nuovo approccio sperimentale deriva dalla mancanza di risultati pienamente soddisfacenti in prove di laboratorio effettuate sia su modelli in scala reale che su modelli in scala ridotta. La strategia adottata nasce dall’idea di sfruttare le tecniche di stampa 3D per realizzare meta-modelli di archi da sottoporre a prove dinamiche che, da una parte possano interpretare correttamente le leggi di scala che governano il fenomeno del *rocking* e dall’altra presentare una stereotomia dei conci che ne consenta l’incernieramento ma ne impedisca lo scorrimento. Questo sistema non solo consente di effettuare una stima veritiera del comportamento sismico degli archi, oggetto del presente lavoro, ma può essere esteso a strutture curve più complesse come volte e cupole in muratura.

Capitolo 1

INTRODUZIONE

Questo lavoro si inserisce in una serie di ricerche volte a preservare il patrimonio di edifici storici in muratura di cui è particolarmente ricco il nostro Paese, puntando l'attenzione su alcune strutture murarie curvilinee come archi, volte e cupole che rappresentano elementi architettonici chiave delle costruzioni storiche e che hanno una grande rilevanza strutturale. Esse pertanto devono essere preservate dai danni derivanti soprattutto dagli eventi sismici a cui è spesso esposto il territorio italiano.

Il crollo della volta affrescata nella Basilica di San Francesco d'Assisi nel 1997, il crollo della cupola nella Chiesa di Santa Maria del Suffragio e nella Chiesa di San Marco all'Aquila nel 2009 (Fig. 1) o il crollo della Basilica di San Benedetto a Norcia durante il terremoto del 2016, sono solo alcuni esempi delle recenti perdite che i terremoti hanno provocato ad un patrimonio architettonico e culturale di indiscutibile valore per la comunità.

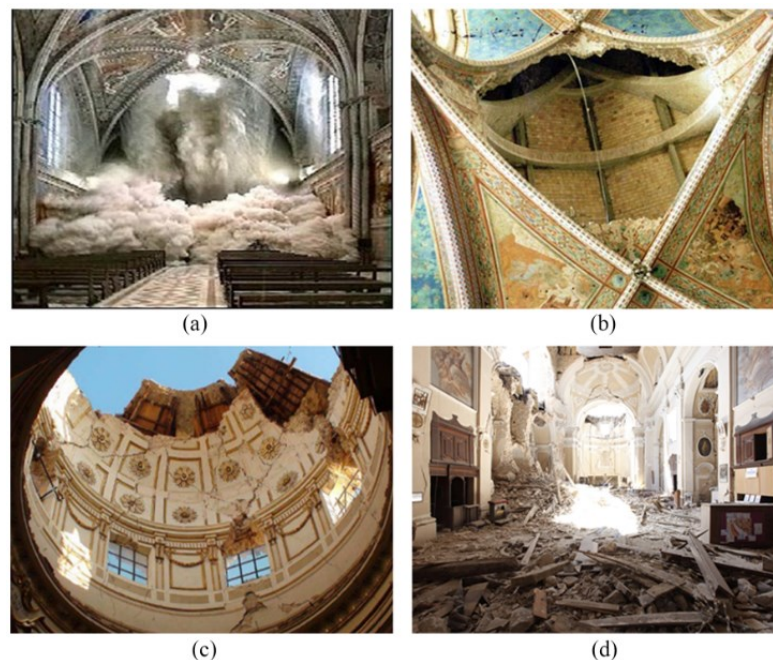


Fig. 1 - Basilica di San Francesco, Assisi, 1997 (a,b); Chiesa di Santa Maria del Suffragio, L'Aquila, 2009 (c); Chiesa di San Marco, L'Aquila, 2009 (d)

Gli effetti devastanti di questi terremoti spesso hanno giustificato una serie di interventi che hanno previsto l'utilizzo di tecniche di rinforzo fin troppo invasive (Fig. 2).



Fig. 2 - Tecniche di rinforzo nel Monastero di San Basilio a L'Aquila, dopo il terremoto del 6 Aprile 2009

Ciò deriva dal fatto che il comportamento delle strutture murarie sotto carico sismico non è ancora bene compreso, nonostante la sopravvivenza di questo tipo di strutture attraverso i secoli, ed è estremamente difficile da prevedere.

Questo giustifica una serie di recenti contributi di ricerca sul tema del comportamento dinamico delle strutture storiche in muratura ed in particolare degli elementi architettonici che le compongono, volti a superare una sorprendente carenza di conoscenze in questo campo.

1.1 Contesto globale

Negli ultimi decenni, in letteratura sono stati proposti modelli meccanici avanzati per descrivere il comportamento complesso delle strutture murarie che considerano aspetti come l'anisotropia, il comportamento non lineare dei materiali, la plasticità, la frattura e il danno [1] [2]. Ma in diversi casi applicativi l'impiego dei modelli sopra

descritti può essere ostacolato dalla difficoltà di effettuare le accurate ed estese prove meccaniche nonché le indagini necessarie per la caratterizzazione dell'elevato numero di parametri meccanici della muratura e per l'identificazione delle condizioni al contorno.

D'altra parte, tenendo conto della natura discreta della muratura, fatta di blocchi o mattoni messi insieme con o senza l'interposizione di strati di malta, anche gli approcci basati sul Metodo degli Elementi Discreti (DEM) hanno guadagnato l'attenzione dei ricercatori [3] [4].

Anche in questo caso, l'accuratezza dei risultati dipende fortemente dalla caratterizzazione del materiale d'interfaccia, generalmente molto impegnativa nelle applicazioni pratiche, poiché piccole variazioni nei parametri assunti per l'interfaccia potrebbero produrre grandi differenze nei risultati.

È quindi abbastanza comprensibile che oggi, considerando le difficoltà sopra richiamate nella definizione di modelli strutturali accurati e rappresentativi delle costruzioni in muratura, un numero crescente di ricercatori sia incline a rinunciare a descrivere il comportamento di risposta al carico, focalizzandosi sulla sola stima dei carichi di collasso. Questo approccio, che può essere inserito nel quadro teorico della "Limit Analysis", sta in realtà ottenendo un crescente consenso in letteratura [5] [6] [7].

Dal punto di vista teorico si ricorda che, nella maggior parte dei casi, poiché la muratura ha solitamente una resistenza a trazione molto bassa, l'unica ipotesi ragionevole che sia possibile fare è che il materiale si comporti unilateralmente, cioè che la muratura non abbia alcuna resistenza a trazione ("No-Tension Model"). In questo senso, una pietra miliare è rappresentata dal lavoro pionieristico di J. Heyman [8] [9], che ha aperto la strada ad ampie applicazioni della teoria dell'Analisi Limite per la determinazione della capacità portante delle costruzioni in muratura con particolare attenzione al caso degli archi in muratura. Inoltre, secondo l'approccio di Heyman è possibile rileggere le classiche teorie di equilibrio per gli archi in muratura nella chiave razionale del noto "Safe Theorem" dell'Analisi Limite [10].

Una completa formalizzazione matematica dei modelli No-Tension è principalmente attribuibile alla Scuola Italiana di Meccanica Strutturale [11] [12] [13].

Negli ultimi anni diversi studi hanno esteso l'applicabilità dell'Analisi Limite alle strutture murarie sia sviluppando nuove teorie sia rivisitando le vecchie teorie alla luce delle attuali conoscenze teoriche. In particolare, diversi contributi di ricerca si sono focalizzati sulla determinazione dei carichi di collasso per archi in muratura e volte [14] [15] [16] [17] approfondendo anche gli effetti dei carichi orizzontali rappresentativi delle azioni sismiche.

Sul tema sopra riassunto, negli ultimi anni si è sviluppato un acceso dibattito scientifico per individuare un approccio comunemente accettato per l'analisi strutturale delle costruzioni in muratura. Nel frattempo, i codici sismici strutturali affrontano il problema della valutazione sismica delle strutture murarie adottando approcci

semplificati, come l'analisi cinematica, o approcci globali, come l'analisi di strutture equivalenti. Secondo questi approcci, la capacità strutturale viene confrontata con una domanda sismica determinata a partire dal concetto di spettro di risposta elastico, che non è adatto al particolare comportamento dinamico delle costruzioni in muratura, specialmente quando sono coinvolti elementi curvi.

Infatti, per descrivere gli aspetti significativi di un comportamento strutturale molto complesso come quello di archi, volte e cupole in muratura sotto azioni sismiche dinamiche, è necessario rappresentare fenomeni altamente non lineari caratteristici dei sistemi “rocking” legati all'apertura delle cerniere.

Per quanto riguarda il caso particolare degli archi in muratura, dal punto di vista teorico, il documento fondamentale di Oppenheim [18] interpreta per primo il comportamento dinamico di un arco in muratura sottoposto a movimenti alla base come un movimento di “rocking” di blocchi rigidi che costituiscono un meccanismo a quattro maglie. Questo approccio è stato ulteriormente approfondito in [19] e, successivamente, in [20] [21], dove vengono presentate anche indagini numeriche DEM e indagini sperimentali su archi in piccola scala. Ulteriori lavori studiano l'influenza della forma, dei danni e delle irregolarità geometriche sulla capacità sismica dell'arco.

Nonostante tutto, il comportamento dinamico degli archi in muratura e di altri tipi di strutture murarie curve è, sorprendentemente, un campo molto poco indagato dal punto di vista sperimentale anche se, soprattutto in situazioni molto complesse come quelle in esame, la sperimentazione gioca un ruolo cruciale nel guidare le scelte di modellazione soprattutto per problemi molto complessi come quelli in questione.

Ciò è dovuto alla difficoltà di eseguire esperimenti in scala reale su costruzioni molto pesanti, difficili e costose da realizzare come casi di laboratorio. Lo stesso vale per gli esperimenti su piccola scala in grado di rappresentare alcune caratteristiche del comportamento dinamico reale, ma che spesso presentano condizioni di interfaccia e/o risposta inerziale molto diverse rispetto ad una struttura vera e propria.

1.2 Obiettivi della ricerca

All'interno del “Contesto Globale” esaminato, si inserisce questo lavoro di ricerca che intende proporre, sulla base di un approccio teorico appropriato, una nuova strategia sperimentale per prove dinamiche su modelli in scala ridotta di strutture murarie curvilinee, modelli capaci di riprodurre le condizioni specifiche che caratterizzano la dinamica di strutture murarie reali.

Questo approccio sfrutta le possibilità offerte dalle tecnologie di stampa 3D, e consiste fondamentalmente nella definizione di meta-modelli apparentemente diversi da una struttura muraria in scala reale, ma che in realtà realizzano le condizioni interfacciali tra i voussoir che sono prevedibili nella dinamica di una costruzione reale.

In questo lavoro, questo nuovo approccio è applicato al caso più semplice degli archi in muratura, ma è applicabile a casi più complessi come quelli riguardanti cupole e volte.

1.3 Struttura della tesi

La tesi si articola in sei capitoli. Nel primo capitolo si presenta il contesto globale in cui si inserisce questa ricerca, ovvero la panoramica delle teorie presenti nella letteratura scientifica con cui si spiega il comportamento delle strutture in muratura sottoposte ai carichi orizzontali rappresentativi delle azioni sismiche.

Nel secondo capitolo si riassume l'evoluzione delle strutture ad arco e delle relative teorie della meccanica; si approfondiscono i modelli teorici che spiegano il comportamento unilaterale della muratura intesa come materiale "Non Resistente a Trazione".

Nel terzo capitolo si analizza il comportamento dinamico delle strutture in muratura ed in particolare quello degli archi secondo la teoria del *rocking* effettuando un approfondito confronto tra la risposta sismica di strutture continue e di strutture a blocchi rigidi. Si presenta quindi una rassegna della letteratura sui test dinamici di archi in muratura in scala reale e su modelli in scala ridotta.

Nel quarto capitolo viene analizzata ed esplicitata la formalizzazione matematica della dinamica degli archi in muratura e viene proposto un nuovo approccio sperimentale per l'elaborazione di due metamodelli.

Il quinto capitolo è dedicato alla descrizione del setup sperimentale specificatamente configurato per i test dinamici eseguiti sui due modelli di arco in scala e vengono analizzati i dati rilevati dalle prove di laboratorio.

L'ultimo capitolo è dedicato ad una riflessione sugli aspetti teorici della dinamica degli archi in muratura e sui risultati ottenuti dalle prove sperimentali eseguite sui due modelli nonché sulle possibili applicazioni future.

Capitolo 2

STATO DELL'ARTE

Qual è il metodo più appropriato per valutare la sicurezza delle strutture in muratura sotto azione sismica? In questo capitolo dopo una breve panoramica sull'evoluzione storico tipologica delle strutture ad arco e sui progressi della relativa teoria della meccanica, si affronta lo studio della muratura partendo dai tre assunti introdotti dal lavoro pionieristico di Jacques Heyman e per estensione si approfondiscono i concetti di muratura come materiale non reagente a trazione.

Dal modello a blocchi rigidi per lo studio delle strutture in muratura si passa ad analizzare il caso specifico delle costruzioni sottoposte ad azioni orizzontali. Vengono dunque confrontati due approcci differenti per lo studio del comportamento dinamico: il modello del “regular pendolum” e quello dell’“inverted pendolum”. Quest’ultimo è alla base delle teorie del *rocking arch* di Oppenheim, che ha affrontato per primo il comportamento dinamico di un arco in muratura, sottoposto a movimenti alla base, come movimento oscillatorio di blocchi rigidi. Dalle osservazioni dedotte anche da studi successivi a questo (De Lorenzis et al., Clemente, Como) si ricavano gli elementi essenziali per opportuni approcci sperimentali dinamici su modelli di archi in scala reale e ridotta.

2.1 Evoluzione storico-tipologica delle strutture ad arco

I primi esempi di strutture curve: archi, volte e cupole risalgono già al III millennio a.C. e nascono dall'esigenza di realizzare varchi di notevole ampiezza all'interno di compagini murarie.

Il sistema trilitico (Fig. 3) basato sulla trasmissione di carichi da un unico elemento lapideo, l'architrave, ai piedritti non riusciva ad assolvere alle esigenze di grandi luci. Tale tecnica onerosa e fortemente impegnativa sotto il profilo esecutivo era per lo più destinata a grandi programmi di edilizia militare o celebrativa.



Fig. 3 - Sistema trilitico, Propilei, Acropoli di Atene (V sec a.C.)

In seguito si rinunciò all'utilizzo di un unico grande monolite per individuare nuove configurazioni strutturali. Queste configurazioni prendono il nome di pseudoarchi.

La forma di pseudoarco più diffusa è quella ottenuta mediante l'utilizzo di un numero più consistente di elementi litoidi di forma irregolare o anche di blocchi regolari disposti aggettanti di poco l'uno sull'altro fino alla sommità. I carichi sono trasmessi verticalmente ai piedritti senza che si produca alcuna spinta e quindi senza avere la necessità di predisporre rinfianchi. Non si generano dunque spinte orizzontali ma si fanno lavorare tutti i blocchi unicamente a compressione.

L'utilizzo di questo dispositivo tecnico è tipico della civiltà micenea (II millennio a.C.), ne è un esempio la tholos di Atreo (Fig. 4), e successivamente delle popolazioni italiche ed etrusche (IX-I sec a.C.).

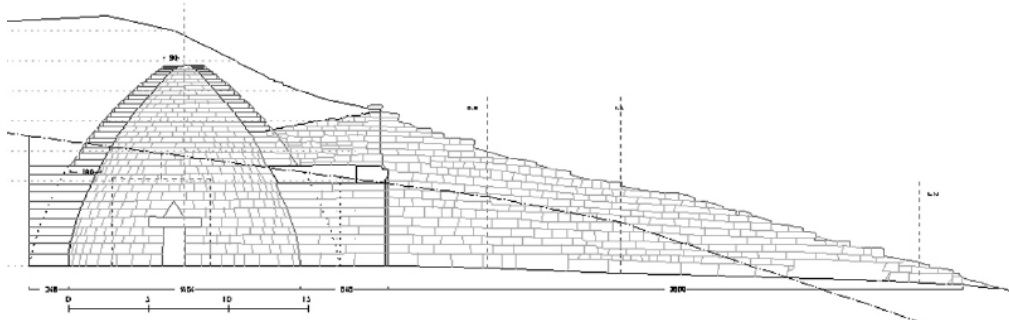


Fig. 4 - Sezione longitudinale di una tholos micenea (XV sec a.C.) [5]

Sono da segnalare, inoltre, tra i dispositivi costruttivi precedenti al sistema arcuato, le soluzioni curve ricavate da grandi blocchi monolitici: è il caso delle fortificazioni a Selinunte.



Fig. 5 - Pseudoarchi monolitici, Selinunte (VI-V sec. a.C.) [22]



Fig. 6 - Ponte a doppio pseudoarco, Selinunte (VI-V sec. a.C.) [22]

La figura 5 mostra come l'elemento orizzontale venisse sagomato all'intradosso per ottenere una forma arcuata, in realtà continuava a trasmettere al muro un'azione di tipo verticale, come nel sistema trilitico.

Si comprende allora la denominazione di pseudoarchi perché queste strutture formalmente sono a sviluppo curvilineo ma in realtà nascondono un comportamento ancora affine allo schema architravato.

Un esempio più evoluto di pseudoarco (Fig. 6) era costituito da un impilamento verticale di blocchi lapidei più piccoli, in cui ogni concio era sovrapposto con un leggero aggetto rispetto al concio inferiore. Questo determinava una trasmissione dei carichi

dall'alto al basso secondo un canale verticale ma non costante. Inoltre era richiesta una cura particolare nella realizzazione affinché la coda di ogni concio fosse caricata in maniera idonea per evitare rotazioni e per creare un equilibrio tra effetti stabilizzanti ed effetti ribaltanti. Nel sistema di blocchi così costruito si riusciva a garantire, quindi, che la distribuzione delle tensioni lungo la superficie di contatto assumesse al più un andamento trapezoidale e che la struttura risultasse soggetta solo a compressione.

Come da queste strutture si sia passati all'arco non è dato sapere.

Il problema dell'origine dell'arco in pietra è una questione ancora aperta e dibattuta, risulta infatti ancora incerto il primato della sua "invenzione" attribuita da alcuni all'architettura greco-ellenistica (V-I sec a.C.) e da altri a quella etrusco-romana (IX-I sec a.C.).

Nella civiltà greco-ellenistica l'utilizzo dell'arco e delle strutture voltate era limitato a particolari tipologie architettoniche: porte, tombe e costruzioni ipogee.

Nell'Etruria del II secolo a.C. l'arco veniva utilizzato per i programmi di potenziamento urbano che investivano il riammodernamento delle cinte murarie.

La Porta di Volterra e l'Arco di Augusto a Perugia (Fig. 7) testimoniano la volontà di inserire la porta urbana nel sistema murario delle cinta come simbolo di potenza e di *urbanitas*. La prima si presenta come un inserimento obliquo elegantemente eseguito nella composizione di un archivoltato formato da cunei tagliati con estrema cura; il secondo è composto da un doppio sistema di archi che sottolineano la ricerca di una sistemazione architettonica imponente e scenografica.

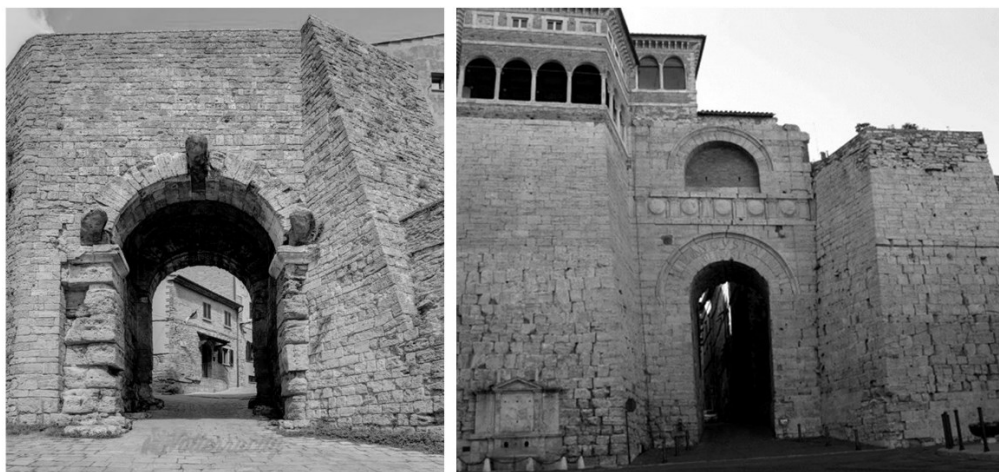


Fig. 7 - Porta etrusca a Volterra, Arco di Augusto a Perugia (III-II a.C.)

Sicuramente spetta ai romani il perfezionamento e l'applicazione su vasta scala delle strutture ad arco. I romani, pur riprendendo tecniche greche ed etrusche, le

perfezionarono al punto da assumerne la completa padronanza sia per quanto riguarda i materiali impiegati che le modalità realizzative.

I romani utilizzarono prevalentemente archi a tutto sesto nei quali i mattoni o i conci presentavano giunti tutti convergenti verso il centro di curvatura, andando così a formare opere caratterizzate da una grande regolarità.

L'uso maggiore di archi in successione fu nella costruzione degli acquedotti. L'arco venne utilizzato dagli architetti romani per marcare significativamente il ritmo degli edifici, inventando anche il motivo dell'arco inserito all'interno del sistema pilastro-trabeazione. Ne sono esempio il Tabularium di Silla e il Colosseo a Roma.

I romani utilizzarono raramente archi a sesto ribassato, tuttavia fecero ampio uso di piattabande (Fig. 8b) formate da cunei opportunamente sagomati (Fig. 8a) e disposti ad incastro.

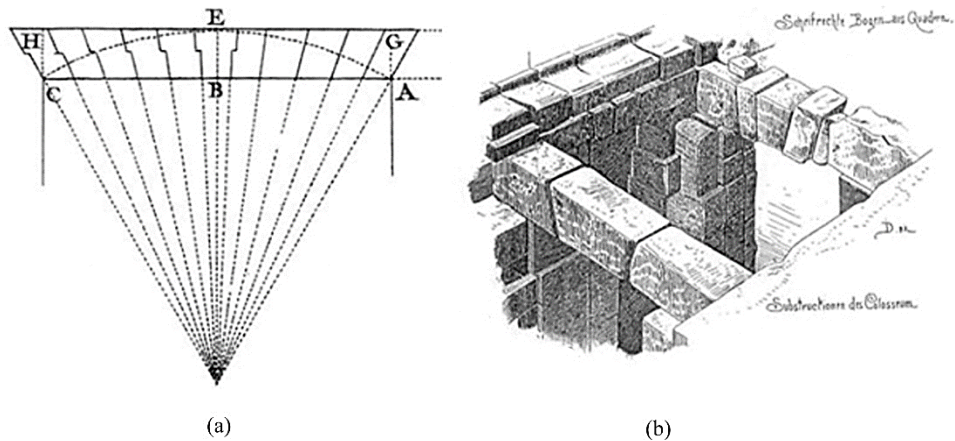


Fig. 8 - (a) Schema di una tipica piattabanda con giunti a gradini (a sinistra) e giunti piani (a destra) [23]; (b) Piattabanda, Colosseo, Roma (I sec d.C.)

Spesso le piattabande erano sormontate da archi di scarico a tutto sesto, che avevano la funzione di reggere il peso della muratura sovrastante, riducendo così il carico gravante sulle piattabande stesse (Fig. 9).

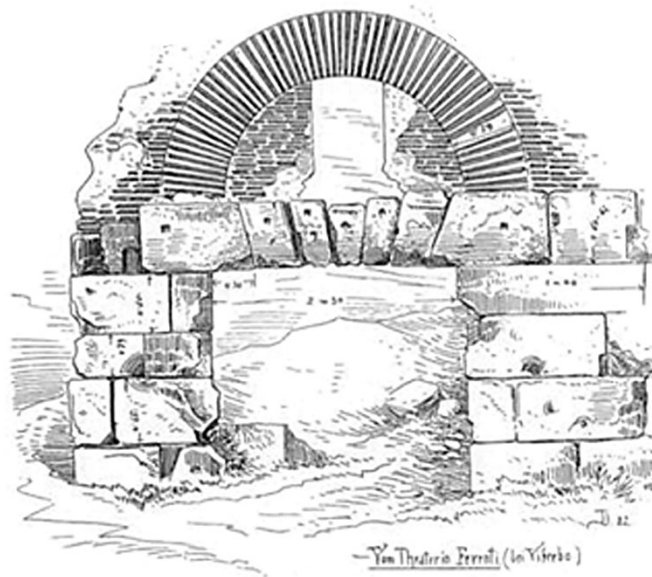


Fig. 9 - Piattabanda sormontata da arco a tutto sesto, Viterbo [23]

L'evoluzione dell'arco ha proseguito poi il suo percorso attraverso i secoli presentando moltissime declinazioni classificabili per aree geografiche e periodi storici passando dall'arco a tutto sesto dell'epoca romana, agli archi a sesto rialzato dell'epoca medievale, agli archi ellittici e policentrici dell'epoca rinascimentale e barocca, a quelli a profilo parabolico tra fine Ottocento e inizi Novecento.

L'arte di tagliare la pietra: la stereotomia

Nella storia delle costruzioni in pietra si dimostrò di essenziale importanza la stereotomia. La parola stereotomia, che designa letteralmente l'arte di tagliare solidi tridimensionali in forme da assemblare, è limitata in architettura a designare l'arte di scolpire la pietra allo scopo di costruire archi, volte, cupole e altri elementi costruttivi.

Per comprendere a pieno il significato di stereotomia si può far riferimento alla definizione attribuita a Claude Perrault (XVII secolo) da J.M. Pérouse de Montcelos in "L'architecture a la Franraise", secondo la quale la stereotomia è "*the art of using the weight of stone against itself so as to hold it up thanks to the very weight that pulls it down*" ovvero "l'arte di usare il peso della pietra contro se stessa in modo da tenerla su grazie al peso stesso che la tira giù".

Di fatto la definizione di Perrault identifica l'arco come origine della stereotomia. Il problema della costruzione di una volta in pietra o di un edificio con archi in pietra è come si è visto un problema innanzitutto di statica. La definizione di Perrault è

effettivamente formulata in termini di meccanica della volta ma allo stesso tempo ci permette di capire che la forma del “voussoir” è essenziale per quest'arte.

La geometria è quindi asservita alla statica ed è quindi “costruttiva” nel senso pieno della parola.

Uno degli aspetti più specifici della stereotomia è il fatto che è una tecnica profondamente radicata nella geometria. A differenza del falegname che realizza lo scheletro di un volume particolare o del fabbro che determina l'involucro, colui che lavora la pietra lavora direttamente nella massa del materiale, al quale può essere data qualsiasi forma.

Questo sicuramente ha portato negli anni a sperimentare le migliori forme da dare alle pietre per garantire l'assemblaggio e la stabilità di architravi (Fig. 10), piattabande,(Fig. 11-12) archi (Fig. 13-14) e volte.

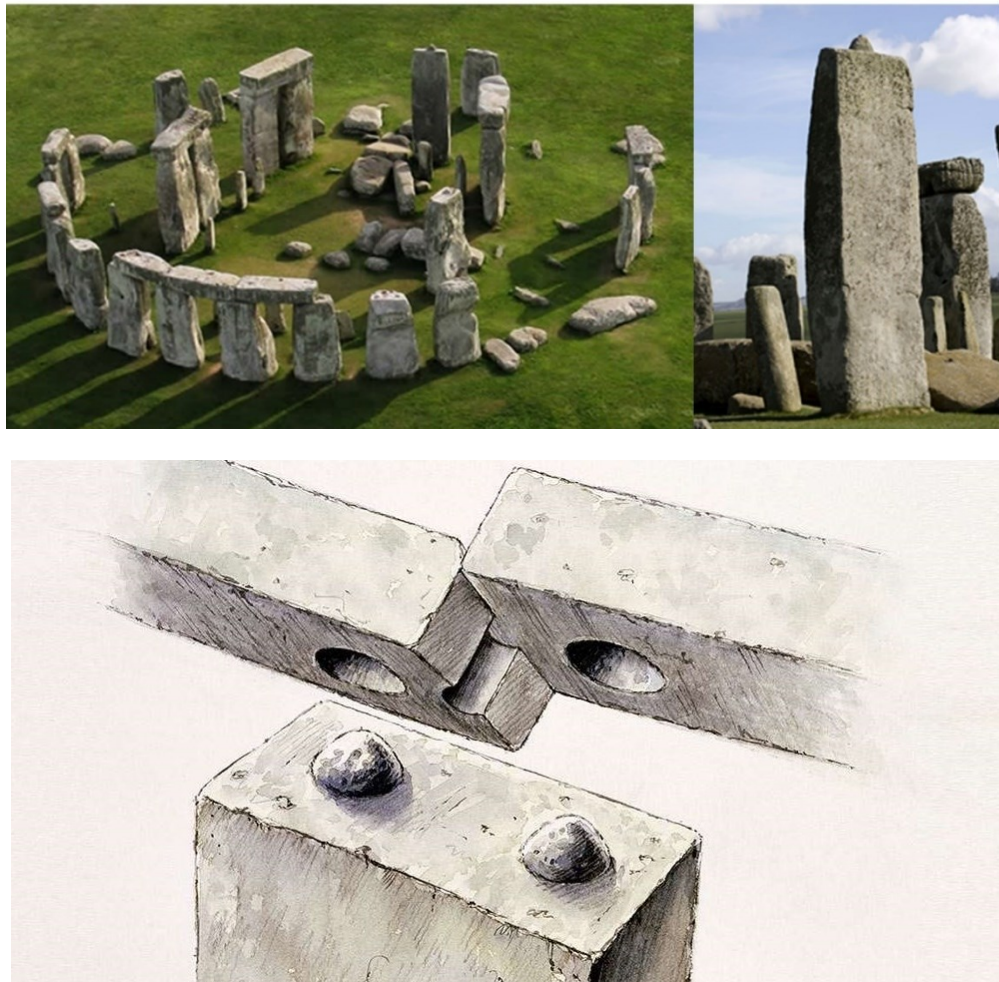


Fig. 10 - Sistema trilitico realizzato a Stonehenge e dettaglio del sistema di ingranaggio tra il monolite verticale e i monoliti orizzontali

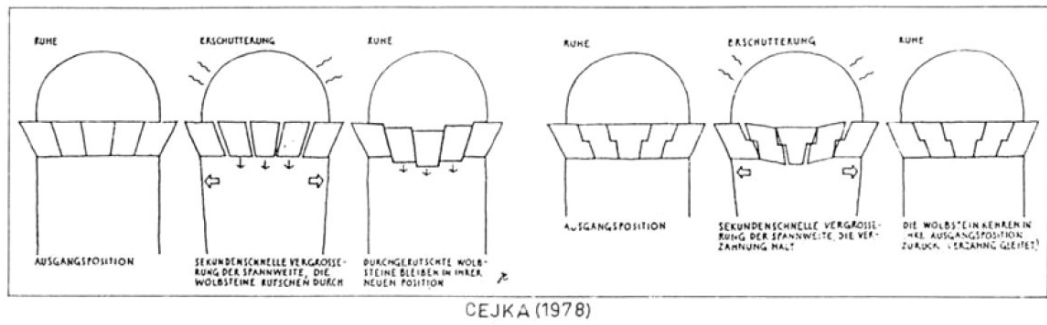


Fig. 11 - Studio di piattabande a giunti lisci e giunti a scalino

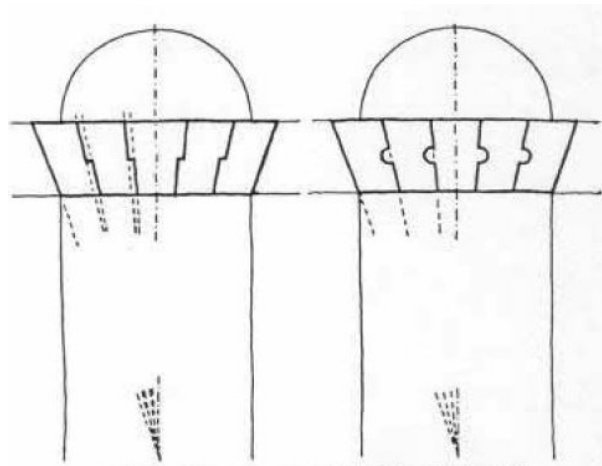


Fig. 12 - Studio di piattabande con giunti a scalino e giunti con lingua e scanalatura



Fig. 13 - Esempio di arco con giunti a scalino nel Mausoleo di Teodorico a Ravenna (VI secolo d.C.)

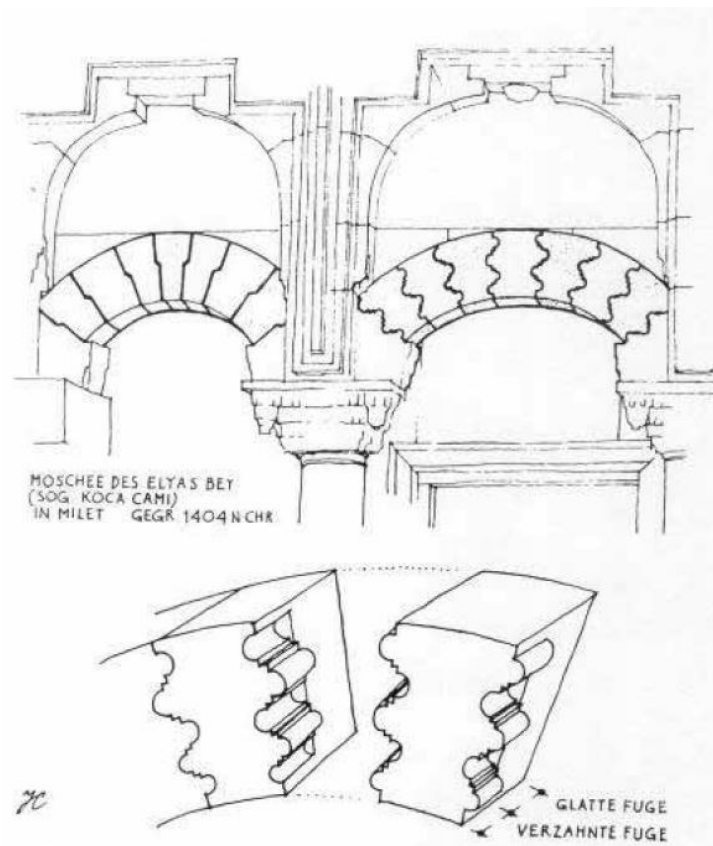


Fig. 14 - Studio di archi con giunti per metà lisci e per metà seghettati

2.2 Breve rassegna storica della teoria della meccanica dell'arco in muratura

Per quanto riguarda la conoscenza delle dinamiche interne alla muratura, Marco Vitruvio Pollione nel I sec. a.C., nella sua opera "De Architectura", già parlava del comportamento spingente delle strutture ad arco, chiaramente noto anche ai progettisti dei successivi mercati traianei del II sec. d.C. come dimostra la soluzione d'angolo da essi adottata.

Infatti l'Aula di testata del Grande Emiciclo (Fig. 15), caratterizzata da un doppio ordine di piattabande in laterizio, di cui le più esterne sormontate da archi di scarico, presenta un tompagno più spesso in corrispondenza dell'angolo. Questo appunto per contrastare la spinta con la massa del muro, non essendo equilibrata dall'azione di altre piattabande.



Fig. 15 - Aula di testata settentrionale del Grande Emiciclo, mercati traianei, Roma

Per impedire che l'azione orizzontale trasmessa da un arco determinasse il ribaltamento dei piedritti, nel Medioevo fu adottato dai magister un metodo grafico per il dimensionamento dei piedritti, di cui non si conosce la paternità. In figura 16 è riportata la cosiddetta regola di Derand (1643), un metodo geometrico empirico usato per proporzionare le dimensioni dei pilastri di archi a tutto sesto e di archi a sesto acuto.

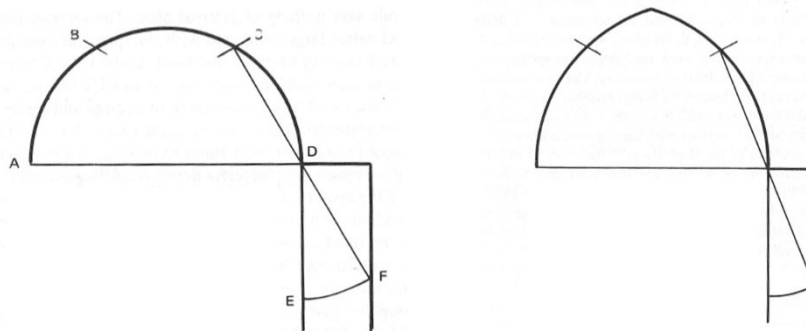


Fig. 16 - Dimensionamento dei piedritti con il metodo grafico

Il dimensionamento geometrico restò per molto tempo il metodo più usato dagli architetti.

Il primo studio meccanico sull'arco si deve a Leonardo da Vinci. In una sua celebre definizione dell'arco è possibile infatti intuire una comprensione approfondita del comportamento meccanico di tale struttura:

“... arco non è altro che una fortezza causata da due debolezze, imperò che l'arco negli edifizii è composto di 2 parti di circolo, i quali quarti circoli, ciascuno debolissimo

per sé, desidera cadere, e opponendosi alla ruina l'uno dell'altro, le due debolezze si convertano in unica forzaza...”

Alcuni disegni presenti nel Codice Forster dimostrano come Leonardo da Vinci (XV sec), eseguendo alcune prove sperimentali su un arco (Fig. 17a), abbia elaborato un primo criterio di sicurezza per l'arco (Fig. 17b) e una prima regola di collasso (Fig. 17c).

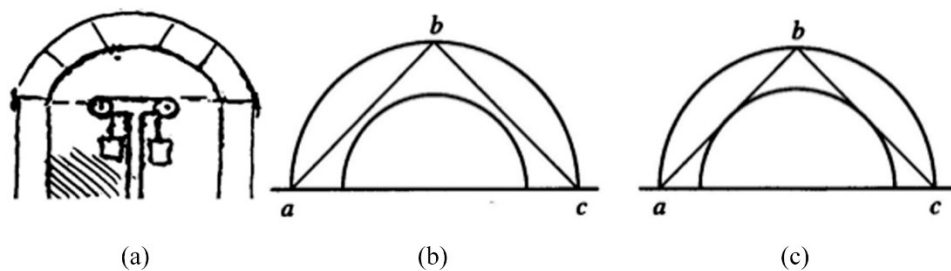


Fig. 17 - Esperimenti su arco (a); primo criterio di sicurezza (b) e criterio di collasso (c)

Leonardo da Vinci sintetizzò la regola per il collasso con queste parole:

“...l'arco non si romperà se la corda dell'archi di fori non tocherà l'arco di dentro...”

Si può così concludere che la sua definizione altro non è che una primitiva formulazione della regola secondo la quale la linea di spinta deve essere contenuta all'interno dello spessore dell'arco, anticipando così ciò che verrà poi ridefinito da Couplet nel 1730.

Gli studi scientifici di Hooke, De La Hire e Couplet

A Robert Hooke si deve il primo studio razionale sulla meccanica dell'arco. Hooke pubblicò nel 1675 un libro contenente una serie di anagrammi tra cui i noti: *“ut tensio sic vis”* e *“ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum”*. La soluzione di tale anagramma, *“come è sospesa una catena flessibile, così ma invertito starà l'arco rigido”*, pubblicata solo dopo la morte di Hooke, lasciava intendere che questi aveva intuito che se avesse potuto risolvere il problema della forma della catenaria avrebbe allo stesso tempo trovato la forma dell'arco perfetto che porta gli stessi carichi in compressione.

La ricerca della soluzione del problema della catenaria non fu banale: Leibniz prima, e Huygens e John Bernoulli dopo, sembrano aver risolto il problema ma con soluzioni non rigorose da un punto di vista matematico.

Il problema, anche se con alcuni errori, fu risolto alcuni anni più tardi (1697) da David Gregory. Gregory, infatti, afferma che:

“...E, al contrario, nessun altro, se non la catenaria, è la figura di un vero arco legittimo, o fornice...” e ancora *“... E quando un arco di qualsiasi altra figura è sostenuto, è perché nel suo spessore è inclusa qualche catenaria...”*

Quest'ultima frase è stata aggiunta da Ware (1809), ma è del tutto chiaro che Gregory aveva capito che, se la linea di spinta si trova all'interno dell'arco, allora l'arco è stabile. Ultimo ma non meno importante, Gregory capì che l'azione orizzontale sul pilastro di un arco è la stessa del tiro di una equivalente catena sospesa. Questo approccio, come vedremo, fu usato nella metà del XVIII secolo da Giovanni Poleni nei suoi studi sulla stabilità della cupola di San Pietro a Roma.

Philippe De La Hire diede importanti contributi allo sviluppo della statica dell'arco, applicando per la prima volta la meccanica allo studio di un arco considerato come composto da corpi rigidi.

Nella sua prima opera (“*Traité de Mécanique*”, 1695) De La Hire studiò un arco semicircolare assemblato da voussoir rigidi e considerò che i giunti tra di loro fossero senza attrito. Assegnato a priori il peso del concio in chiave, determinò i pesi degli altri conci costruendo il poligono delle forze dei conci e quindi il poligono funicolare dell'intera struttura (facendo largo uso di relazioni fondamentali di statica grafica). Tuttavia, dato che De La Hire aveva assunto che i giunti di contatto fossero lisci, la linea di spinta doveva essere ortogonale ai giunti conducendo ad un'affermazione paradossale: se la linea di spinta è orizzontale, ne consegue che i voussoir di spinta devono avere un peso infinito per garantire la stabilità dell'arco. De La Hire, comunque, notò che l'attrito tra i conci avrebbe conferito la stabilità necessaria alla struttura e nel 1712 (“*Sur la construction des voutes dans les édifices*”) tornò sull'argomento ma con un'ipotesi completamente diversa: considerò che l'attrito era talmente rilevante che lo scorrimento non poteva avvenire. Dunque la direzione della linea di spinta non era più fissa come prima, ma indeterminata.

Egli superò questo problema introducendo un'idea potente per comprendere il comportamento dell'arco. Si chiese: cosa succede se i piedritti sono troppo deboli e mostrano alcuni piccoli cedimenti verso l'esterno? E come sarebbe il comportamento dell'arco?

Rispose a questa domanda affermando che l'arco (Fig. 18a) si sarebbe fessurato in una sezione critica LM tra il blocco d'imposta e la chiave di volta. In L si formerà dunque una cerniera e la linea di spinta sarà determinata. Inoltre da alcune considerazioni sull'equilibrio delle porzioni LMF e LMI, egli determina il valore di P

(Fig. 18b) e quindi la stabilità dell'intera struttura può essere verificata scrivendo il momento intorno allo spigolo H (Fig. 18a).

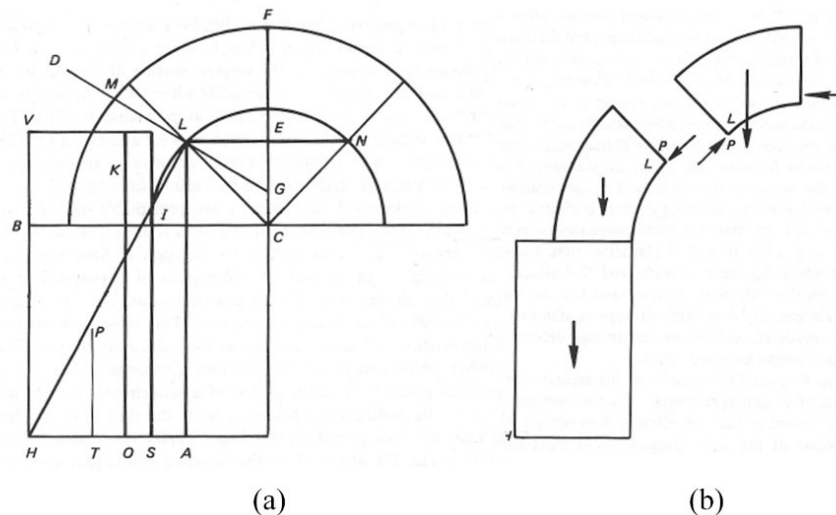


Fig. 18 - In (a) la sezione critica è la sezione LM. In (b) la linea di spinta deve passare tangenzialmente attraverso L. Conoscendo il peso di LMF, il valore della forza P può essere valutato e può essere utilizzato per verificare la stabilità dell'intera struttura intorno a H

Il risultato ottenuto da De La Hire, nonostante presenti alcuni errori e lacune, rappresenta un contributo importante ed originale per lo studio della statica degli archi.

In questo contesto storico, si inserisce il lavoro di Claude Antoine Couplet che scrisse nel 1729 e nel 1730 due importanti memorie sulla spinta dell'arco.

In particolare nella seconda memoria "Seconde partie de l'examen de la poussée des voutes" l'autore passa da un modello a conci lisci (studiato nel primo lavoro) ad uno in cui compare l'"ingranamento", affermando, senza però una valutazione quantitativa, che esso si oppone allo slittamento dei conci per cui il collasso può avvenire solo se si innescano rotazioni mutue attorno ad alcuni punti dell'intradosso o dell'estradosso, che vengono definiti "cerniere".

Nell'opera Couplet avvalorava la tesi secondo cui la condizione sufficiente di equilibrio dell'arco è soddisfatta "se la corda della metà dell'estradosso non taglia l'intradosso ma giace all'interno dello spessore dell'arco" (Fig. 19).

Riprendendo le parole di Heyman si può dire che *“il contributo di Couplet è eccezionale. Aveva idee chiare sulle linee di spinta e sui meccanismi di collasso causati dalla formazione di cerniere; ha reso esplicite le sue ipotesi semplificatrici; e ha usato queste idee per ottenere una soluzione essenzialmente corretta e completa del problema della progettazione degli archi”* [Heyman, J. (1982). “The Mansonry Arch”.]

La conoscenza della meccanica dell'arco acquisita in questo periodo è dimostrata dalla storia della ristrutturazione di San Pietro a Roma e in particolare dagli studi condotti da Poleni in cui possiamo ritrovare una prima considerevole applicazione della meccanica degli archi.

Il caso della cupola di San Pietro a Roma e l'intervento di Poleni

La cupola di San Pietro, progettata da Michelangelo pochi anni dopo la sua costruzione cominciò a mostrare una serie di crepe.

Lo schema delle crepe fu riconosciuto da Vanvitelli negli anni 1742 e 1743 e i suoi disegni furono pubblicati da Poleni (1748): la figura 21 mostra come le crepe meridiane, risalendo dal tamburo, dividessero la cupola in porzioni (lune).

Secondo il parere dei “Tre Matematici” (Le Seur, Jacquier e Boscovich) chiamati da Papa Benedetto XIV nel 1742 a riferire sulle condizioni della cupola, essa era effettivamente danneggiata e necessitava di un'ampia ristrutturazione. L'intervento avrebbe previsto, oltre a cerchiature in ferro per la cupola, anche un inspessimento dei contrafforti con la sovrapposizione di pesanti statue. Papa Benedetto XIV, non del tutto convinto della loro proposta, decise di richiedere la valutazione di un importante scienziato italiano: Giovanni Poleni.

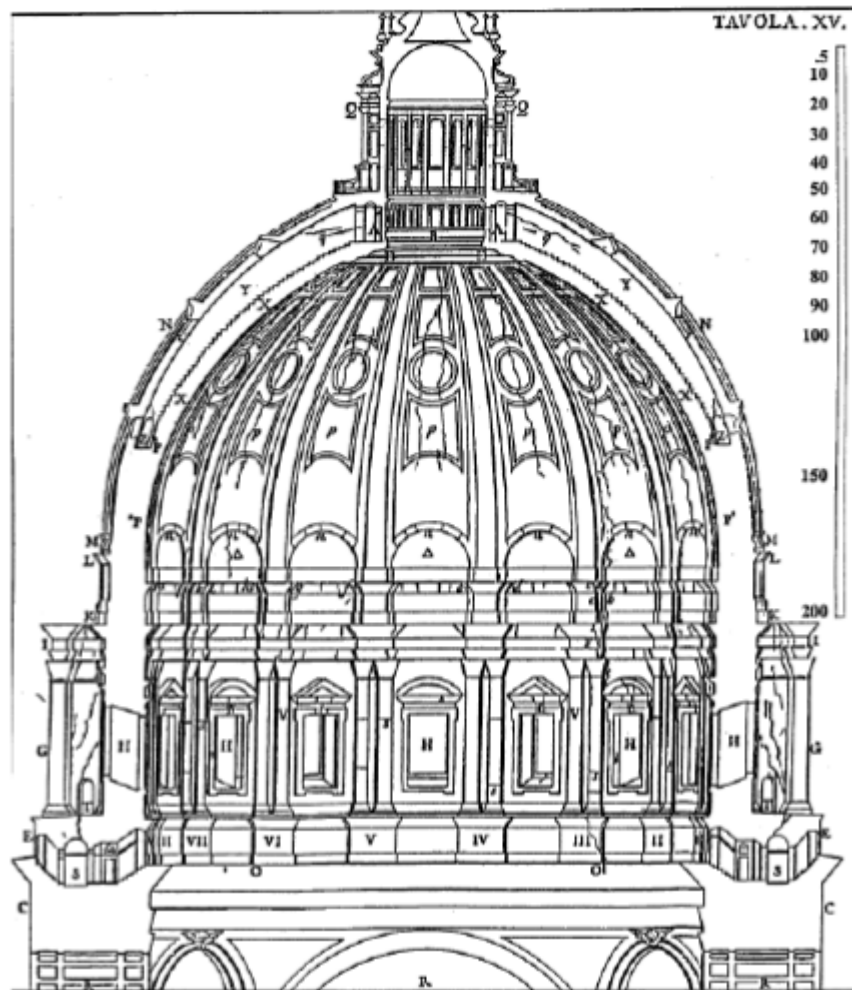


Fig. 21 - Il disegno di Vanvitelli che illustra in dettaglio il modello di crepe che corre lungo l'intradosso della cupola di San Pietro (Poleni, 1748)

L'analisi di Poleni stabilì che la cupola era sicura e che le crepe erano causate da difetti di costruzione e dall'uso di muratura scadente. L'importanza di questo studio risiede nell'applicazione dei principali risultati raggiunti negli anni precedenti. Infatti, nella sua Memoria (1748), Poleni mostrò una profonda conoscenza del lavoro di De La Hire e Couplet e la comprensione del concetto di catenaria di Hooke.

Poleni trattò la cupola dividendola in 50 "lune" e, studiando una di esse, risolse il problema dell'equilibrio di un arco bidimensionale con spessore quasi nullo alla corona. La linea di spinta fu determinata sperimentalmente caricando una corda flessibile con alcune sfere di massa variabile considerando anche il carico della lanterna sovrapposta (Fig. 22).

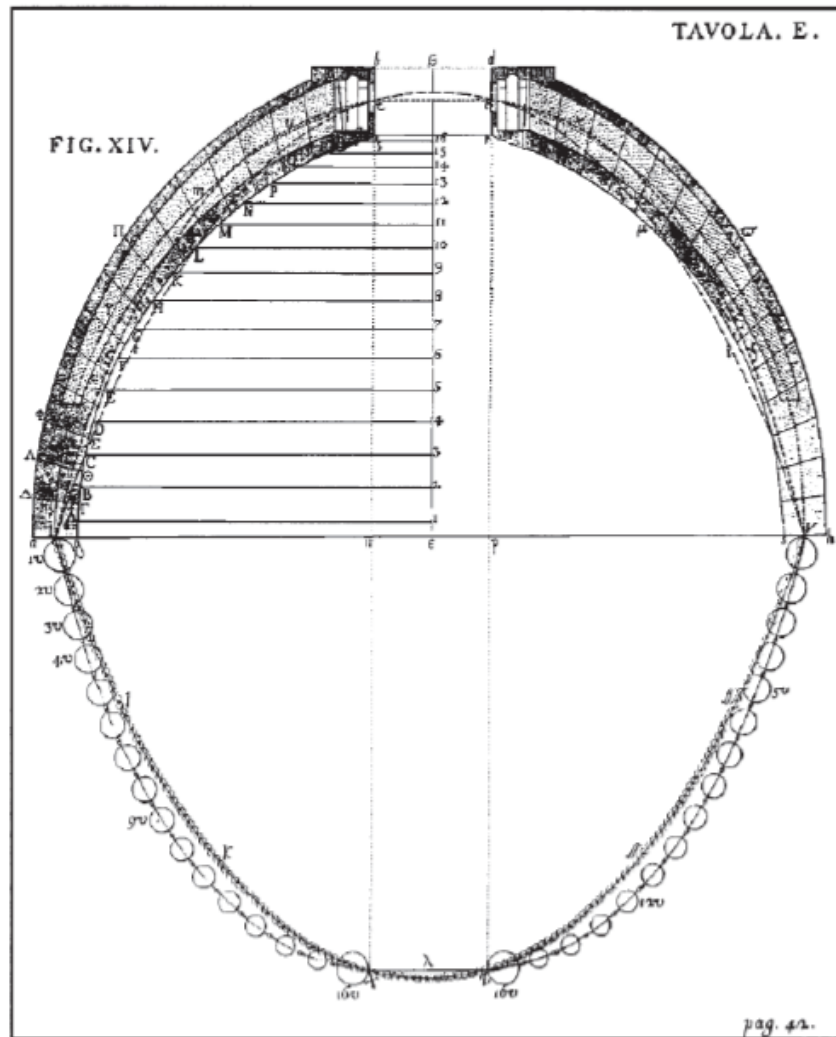


Fig. 22 - Poleni analizzò una "luna" usando il concetto di catena pendente di Hook; modellò il peso di una luna con 32 sfere di massa variabile considerando anche il carico della lanterna sovrapposta.

Il risultato di questa prova sperimentale, eseguita nel laboratorio di Padova, fu che la catena rovesciata giaceva all'interno dello spessore della cupola dimostrando in questo modo che ogni luna era sicura e di conseguenza anche l'intera cupola. Egli concluse che l'andamento delle crepe era dovuto solo al materiale scadente usato per la parte inferiore della costruzione. Il Papa accettò il lavoro di Poleni e gli affidò la ristrutturazione sotto la supervisione tecnica di Vanvitelli: la cupola fu quindi riparata e rinforzata tra 1743 e 1744 con cerchiature di ferro e interventi di "scuci e cuci" per le crepe. Nessun'altra ristrutturazione fu fatta durante gli ultimi tre secoli e la Cupola è attualmente in una condizione perfettamente stabile.

Gli studi scientifici del XVIII e XIX secolo: da Coulomb a Méry

Particolarmente significativo fu l'operato di Charles Coulomb (1736-1806) che, nel suo "Essai sur une application des règles de maximis & minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture", espone i suoi studi sulla volta a botte ed elaborò una teoria relativa sia alle volte prive di attrito, sia a quelle in cui esso è presente. Con Coulomb si assistette ad un radicale cambiamento degli studi sulle strutture in muratura: in primo luogo il modello fisico di riferimento si arricchì di nuovi aspetti, che consentirono di avvicinarlo maggiormente alla realtà sperimentale, includendo nei calcoli coesione ed attrito, ed inoltre mutò completamente l'atteggiamento con cui veniva formulato il problema dell'arco. Se prima gli studiosi determinavano la geometria della volta in funzione delle sollecitazioni che dovevano corrispondere ad un dato schema statico, ritenuto ottimale, con Coulomb si cercò di determinare i valori limite delle forze che sarebbe stato possibile applicare ad un arco di dimensioni assegnate.

Il procedimento indicato da Coulomb consentì di rimuovere l'ipotesi secondo la quale la rottura dell'arco si verificherebbe per un giunto inclinato a 45° e condusse alla determinazione delle sezioni realmente più deboli, portando così alla determinazione del vero comportamento della volta.

Nel 1785, Lorenzo Mascheroni con il suo trattato "Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte" cercò di dare forma analitica rigorosa ai principali problemi che intervengono nel progetto degli archi e delle cupole.

L'abate Mascheroni nella prima parte del trattato discusse il problema dell'equilibrio di sistemi articolati di aste incernierate. Nella seconda parte affrontò lo studio degli archi: dall'ipotesi del caso ottimale dell'arco con spessore infinitesimo e soggetto solo al peso proprio, al caso di archi dotati di spessore finito soggetto a carichi verticali. Nella terza parte discusse il caso delle cupole, analogamente alla precedente trattazione. Nella quarta parte affrontò nuovamente il tema dell'arco e della cupola soggetti a qualsiasi condizione di carico.

Con lo studio dei sistemi di aste Mascheroni sistematizzò un metodo, in seguito applicato agli archi, che si basava sull'individuazione di due meccanismi di collasso: il primo, riprendendo l'opera del De la Hire, prevedeva la divisione della struttura in tre blocchi articolati, il secondo, riprendendo i risultati di Couplet e Coulomb, prevedeva un'articolazione in quattro blocchi che ruotano rispetto a cerniere che si alternano tra estradosso e intradosso.

Anche Louis Navier (1785-1836) si cimentò nello studio della statica degli archi rivolgendo l'attenzione alla resistenza del materiale, partendo dall'ipotesi di non reaganza a trazione e affermò che, per avere una distribuzione delle tensioni di sola

compressione al più triangolare, la risultante può collocarsi allo spigolo superiore del 3° medio in chiave e allo spigolo interno del 3° medio nel giunto alle reni.

Ricordiamo che Coulomb, assumendo una infinita resistenza a compressione del materiale, ipotizzava invece che la risultante fosse applicata in chiave all'estradosso e all'intradosso nel giunto critico.

Franz Josef Gerstner (1756-1832) studiando il problema dell'arco in condizioni ordinarie di esercizio, definì la linea di resistenza e la linea di pressione e affermò che era possibile tracciare infinite linee all'interno dell'arco che soddisfacessero l'equilibrio e che fossero contenute nello spessore dei conci.

Agli studi di Navier e Gerstner si aggancia il metodo proposto da Eduard Henry Méry (1805-1866) nel 1840 per il dimensionamento e la verifica di piccoli archi.

Si tratta di una costruzione grafica che consente di determinare l'entità della spinta partendo dall'ipotesi che le varie sezioni dell'arco siano sottoposte solo a tensioni di compressione, il che risulta verificato se la linea di resistenza (definita dal Méry "curva della pressioni") risulta ovunque interna al terzo medio. Tra le infinite curve considerabili, Méry indica quella che passa per l'estradosso del terzo medio in chiave e per l'intradosso del terzo medio alle reni ovvero definisce la curva limite della volta sul punto di lesionarsi.

Dopo gli studi di Méry che risalgono alla metà del XIX secolo, le ricerche sulle strutture ad arco in muratura si collocano nell'alveo dell'analisi elastica delle strutture e lo studiano come una trave ad asse curvilineo.

Nuove teorie

La moderna pietra miliare dello studio, che riempie un vuoto teorico di quasi cento anni esistenti nella letteratura scientifica sugli archi a voussoir, è dovuto al nuovo approccio introdotto da Anthony Kooharian con il suo lavoro "Limit Analysis of Voussoir (Segmental) and Concrete Arches" (1952). Questo lavoro rappresenta il punto di partenza per l'applicazione dell'analisi limite alle strutture in muratura. Con questo lavoro, tutte le applicazioni di Poleni, Coulomb, Barlow e Yvon Villarceau basate sull'"approccio dell'equilibrio" trovano finalmente una base teorica.

Anche se Kooharian non ha fissato rigorosamente le ipotesi di base necessarie per applicare i teoremi dell'analisi limite alle strutture in muratura e ha considerato solo il problema dell'arco a voussoir, il suo lavoro è il punto di partenza di una nuova era. Infatti, pochi anni dopo, Jacques Heyman (1966) fissò una base teorica rigorosa attraverso tre chiare ipotesi fondamentali, sufficienti per l'applicazione dell'analisi limite alle strutture in muratura. Nel suo lavoro Heyman studiò a fondo l'arco ed estese l'analisi

a una vasta gamma di strutture in muratura, con particolare riferimento alle cattedrali gotiche e ai loro peculiari elementi strutturali.

2.3 Muratura come materiale non reagente a trazione (NRNT)

La caratteristica principale del materiale muratura è la sua debolezza fisiologica sotto carichi di trazione. Tutto ciò può indurre preoccupazione soprattutto quando emergono quadri fessurativi diffusi sulle superfici esterne. In realtà, nonostante il materiale murario sia piuttosto debole sotto carichi di trazione, quando la struttura presenta una geometria ben proporzionata e una corretta distribuzione del carico, esse lavora essenzialmente in regime di compressione, mostrando solo limitati e deboli scorrimenti locali ed esibendo una notevole stabilità [24].

È proprio la scarsa resistenza a tensioni di trazione che permette loro di adattarsi a tutti i possibili, e probabili, piccoli cambiamenti delle condizioni al contorno (come quelli prodotti dagli assestamenti del terreno) rispondendo con campi di spostamento essenzialmente rigidi a tratti e che richiedono un costo energetico esiguo.

Tali comportamenti sono una manifestazione della risposta pressoché unilaterale della muratura, sintetizzati da Jacques Heyman nel suo famoso articolo "The Stone Skeleton" [8]. I tre presupposti fondamentali del modello unilaterale di Heyman, tradotti in un modello al continuo, implicano una legge di normalità per le sollecitazioni e le deformazioni. Quindi l'analisi di stabilità delle strutture murarie può essere ricondotta nell'ambito dell'Analisi Limite, applicando i teoremi statico e cinematico basati su campi di sollecitazione e deformazione ammissibili.

2.3.1 Modello di Heyman

Lo studio delle strutture in muratura nel corso degli ultimi anni ha visto una enorme espansione e l'utilizzo di diversi approcci di modellazione analitica e numerica. Il modello più semplice ed efficace tiene conto dei soli aspetti essenziali di questo materiale: buona resistenza a compressione, scarsa resistenza a trazione ed un elevato valore del coefficiente di attrito.

Tali requisiti sono tradotti da Heyman nelle tre ipotesi:

1. Infinita resistenza a compressione
2. Assenza di scorrimento tra i giunti
3. Resistenza a trazione nulla

La prima ipotesi deriva dall'osservazione che le tensioni di compressione medie presenti nelle strutture in muratura sono solitamente basse in rapporto alla resistenza, tali da poter considerare assente il pericolo di rottura del materiale per compressione.

Tali considerazioni, anche se potrebbero sembrare poco realistiche per alcune strutture particolari, appaiono nella maggior parte dei casi piuttosto veritiere. Heyman osserva che anche per strutture voltate a guscio di grande luce, come nel caso da lui analizzato di un paraboloide ellittico [25], i livelli di tensione risultano molto bassi. Peraltro, eventuali picchi di tensione, in grado di generare fenomeni di schiacciamento, provocano solitamente effetti locali, non tali da comportare il collasso globale della struttura.

La seconda ipotesi riguarda l'assenza di scorrimento tra blocchi. Si assume, infatti, che il materiale sia assemblato in maniera tale che l'attrito e l'ingranamento tra le varie parti, impedisca lo scorrimento. Bisogna precisare che scorrimenti locali di lieve entità possono essere sempre presenti ma solitamente non tali da inficiare la stabilità globale della struttura.

La terza ed ultima ipotesi potrebbe essere considerata troppo conservativa visto che i singoli blocchi potrebbero comunque presentare una qualche resistenza a trazione. Tuttavia ci pone in condizioni di sicurezza poiché i giunti di malta, che risultano sostanzialmente incapaci di resistere a trazione, rappresentano l'elemento debole della muratura.

Dal tipico diagramma sperimentale tensione-deformazione della muratura riportato in figura 23, si evince come la resistenza a trazione σ_t sia molto più bassa di quella a compressione σ_c , con un rapporto σ_t/σ_c che solitamente è inferiore a 0.1.

Con questa ultima restrizione si assume dunque che la muratura abbia un comportamento unilaterale e possa subire distacchi lungo una qualsiasi superficie interna con dispendio di energia nullo.

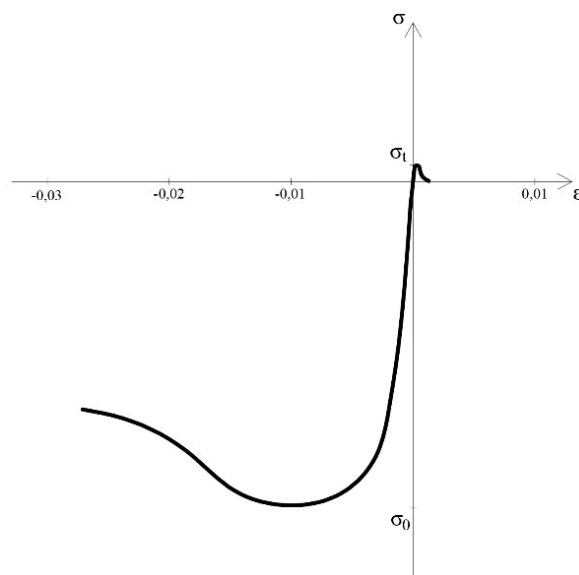


Fig. 23 - Diagramma tensione-deformazione

Su questi principi si basa la teoria del materiale NRNT (Normal Rigid No Tension) (Fig. 24) il modello più semplice per studiare il comportamento della muratura e che rappresenta una estensione al continuo delle teorie di Heyman.

Questo genere di materiale, che non necessita di alcun parametro meccanico per la sua definizione, è definito quindi da:

- ipotesi di non resistenza a trazione
- legge di normalità della deformazione totale sul cono degli stati di tensione ammissibili

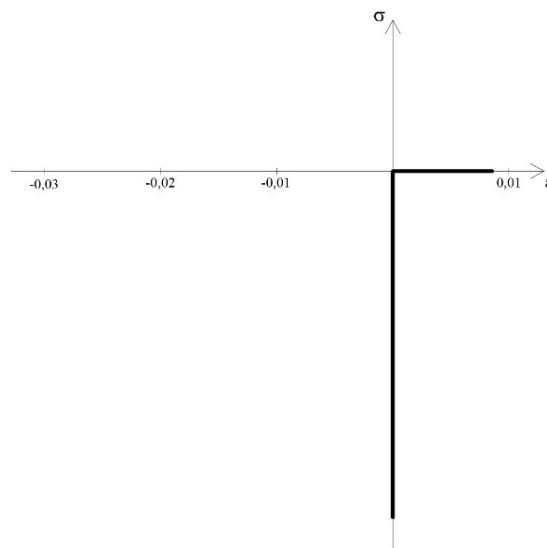


Fig. 24 - Diagramma tensione-deformazione per materiale NRNT. Per $\epsilon > 0$ la tensione è completamente determinata dalla deformazione, il comportamento è elastico per qualsiasi deformazione positiva, mentre la sollecitazione è non costitutiva per $\epsilon = 0$

Come mostrato in figura 24 nel caso 1d, questo modello è rigido in compressione e si allunga liberamente quando $\sigma = 0$. Il suo comportamento uniassiale sotto allungamento è di tipo elastico: tale deformazione infatti, che va interpretata come una misura della frattura del materiale, è legata alla tensione da una relazione univoca per cui laddove si verificano delle deformazioni il materiale resta inerte.

Considerando quindi un corpo Ω costituito da un materiale ideale NRNT, il tensore degli sforzi T dal momento che sono consentiti solo sforzi di compressione è semidefinito negativo:

$$T \in Sym^- \quad (2.1)$$

La deformazione effettiva $E^* = (E(u) - \underline{E})E^* = (E(u) - \underline{E})$, dove \underline{E} sono le deformazioni assegnate (distorsioni), è semidefinita positiva:

$$E^* \in Sym^+ \quad (2.2)$$

A questo si aggiunge poi che, per l'ipotesi di assenza di scorrimenti, vale la condizione di normalità per cui la tensione T non compie lavoro per la deformazione effettiva E^* , e quindi si ha:

$$T \cdot E^* = 0 \quad (2.3)$$

Quest'ultima condizione è sufficiente purchè restino validi i due teoremi dell'analisi limite, statico e cinematico, che, anche negli ultimi anni, si sono rivelati validi strumenti utilizzati da diversi autori [26] [27] per la comprensione del comportamento delle strutture in muratura.

2.3.2 I sistemi murari monodimensionali: stati di sollecitazione compatibili

La definizione di materiale NRNT descritta nel § 2.3 acquista maggiore significato se riferita alla cella resistente elementare [5] di una struttura in muratura costituita da due blocchi murari ideali di altezza h (Fig. 25).

I due blocchi tenuti premuti l'uno contro l'altro da una sollecitazione di compressione più o meno eccentrica e da una eventuale azione tagliante non possono compenetrarsi ma possono distaccarsi.

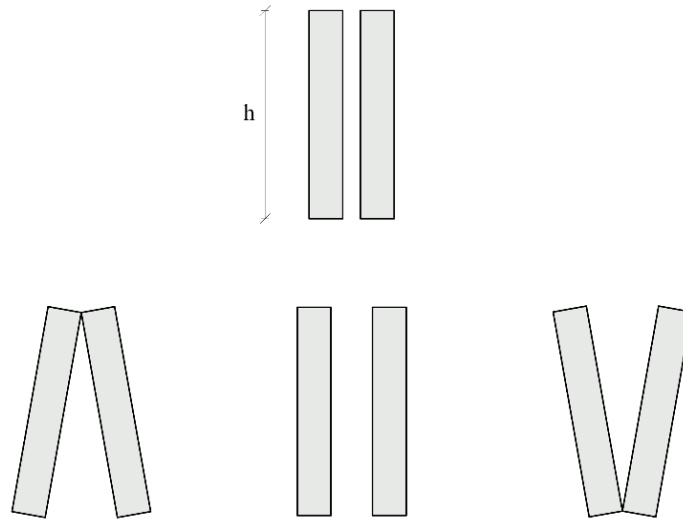


Fig. 25 - Cella resistente elementare e spostamenti ammissibili tra blocchi

Gli stati di sollecitazione saranno descritti dal vettore Σ :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} M \\ N \\ T \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Sulla base delle ipotesi assunte, la componente di taglio non subirà alcuna limitazione e, visto che non caratterizza in alcun modo la condizione limite dell'equilibrio tra i blocchi, si esaminerà solamente la proiezione σ' del vettore σ sul piano coordinato N,M.

Dunque, lo stato di sollecitazione di pressoflessione caratterizzato da sforzo normale N e momento M non potrà superare le rette limite $M = N \frac{h}{2}$ e $M = -N \frac{h}{2}$ ovvero le rette OA e OB della Fig. 26.

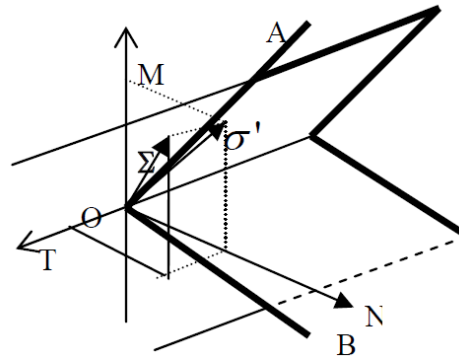


Fig. 26 - Regione degli stati di sollecitazione ammissibili

La generica deformazione nella singola cella resistente ϵ è nulla o è una deformazione di distacco. La deformazione generalizzata E :

$$E = \begin{bmatrix} \varphi \\ \Delta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

sarà composta dalle componenti della deformazione φ, Δ e γ per cui lavorano rispettivamente M, N e T .

L'elemento non subirà nessuna deformazione da distacco (Fig. 27a) se la forza di compressione agente all'interno della sezione non si andrà a collocare sul bordo superiore o inferiore della sezione stessa (Fig. 27b e 27c). In questi ultimi due casi gli stati di sollecitazione agenti saranno rappresentati dai vettori: Σ_o^+ a cui corrisponde la deformazione di distacco data dal vettore E^+ (con cerniera in alto) e Σ_o^- a cui corrisponde la deformazione di distacco con cerniera in basso, data dal vettore E^- .

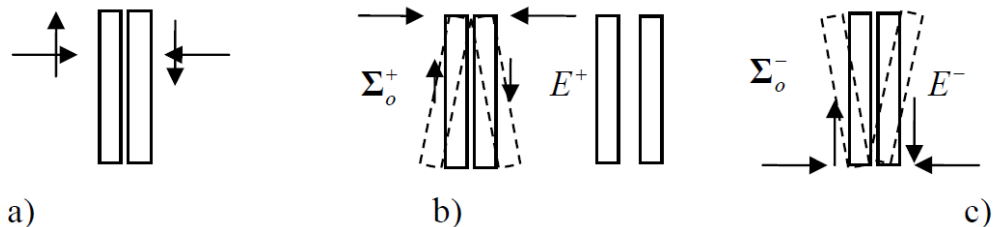


Fig. 27 - Stati di sollecitazione che non producono (a) o che producono deformazioni da distacco (b,c)

Lo stato di sollecitazione agente sull'elemento nella condizione limite (+) ovvero il vettore Σ_o^+ , non lavora durante lo sviluppo della deformazione da distacco E^+ e lo stesso si potrà dire per la seconda condizione limite (-). Quindi risulterà:

$$\Sigma_o^+ \cdot E^+ = [N \ h/2 \quad N \quad T] \begin{bmatrix} \varphi \\ -\varphi \ h/2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.6)$$

$$\Sigma_o^- \cdot E^- = [-N \ h/2 \quad N \quad T] \begin{bmatrix} -\varphi \\ -\varphi \ h/2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

La deformazione di distacco E^+ nel piano M, N è quindi ortogonale alla retta limite $M = N \frac{h}{2}$ e quella E^- è ortogonale alla retta limite $M = -N \frac{h}{2}$ (Fig. 28).

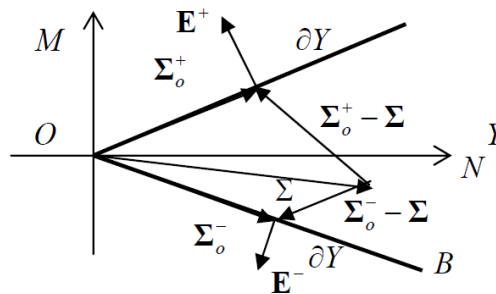


Fig. 28 - Stati di sollecitazione ammissibili e deformazioni di distacco

Il generico stato di sollecitazione ammissibile Σ , non potendo compiere lavoro positivo per la generica deformazione di distacco E , imporrà la condizione:

$$\Sigma \cdot E \leq 0, \quad \forall \sigma \in Y \quad (2.8)$$

dove Y è la regione di interesse.

Nel caso in cui $\Sigma = \Sigma_o^+$ ed $E = E^+$, ovvero se $\Sigma = \Sigma_o^-$ ed $E = E^-$ si avrà la particolare condizione:

$$\Sigma_0^\pm \cdot E^\pm = 0. \quad (2.9)$$

Tale disuguaglianza esprime la condizione di normalità tra il vettore sollecitazione limite Σ_0^+ , Σ_0^- e il vettore deformazione ad esso associato E^+ , E^- .

Generazione di meccanismi

È stata dunque descritta la possibilità che in alcune celle resistenti nascano condizioni tali da produrre deformazioni da distacco. Tali condizioni determinano quindi dei campi di spostamento che prendono il nome di *meccanismi*.

Nell'emblematico caso di una struttura ad arco come quello in Fig. 29, nel momento in cui la curva delle pressioni lambisce l'intradosso dell'arco nei punti B e D e l'estradosso nei punti A e C , si verificheranno incenerimenti con deformazioni da distacco nei quattro punti.

In particolare in A e C si avrà la deformazione da distacco E^+ con incernieramenti all'estradosso, mentre in B e D la deformazione da distacco E^- produrrà incernieramenti all'intradosso dell'arco.

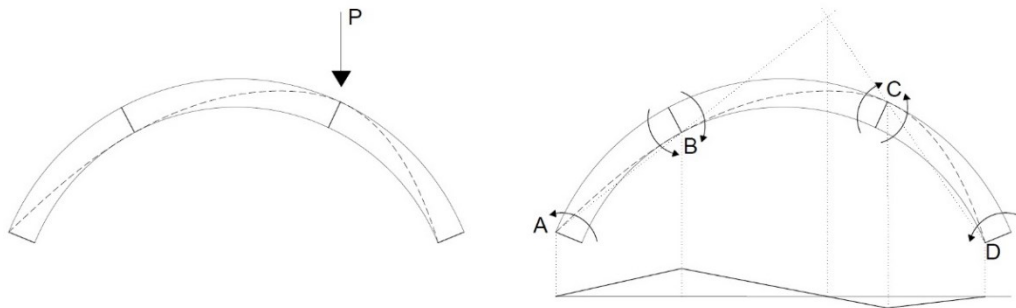


Fig. 29 - Curva delle pressioni in un arco soggetto a carico P e cinematiso a quattro cerniere in $ABCD$

L'arco si deforma dunque come un sistema costituito da tre tratti rigidi AB , BC e CD a cui corrispondono rotazioni relative cinematicamente compatibili.

2.3.3 Modello a blocchi rigidi per lo studio delle strutture in muratura

L'aspetto meccanico principale delle strutture in muratura è il loro comportamento unilaterale e quindi la possibilità di manifestare fratture diffuse e la formazione di meccanismi a blocchi rigidi.

Tali fenomeni sono osservabili molto spesso a causa di cedimenti di fondazione (Fig. 30), sovraccarichi accidentali (Fig. 31) e azioni orizzontali (Fig. 32).



Fig. 30 - Meccanismo di frattura per cedimento del pilone nel Ponte Deba, Paesi Baschi, Spagna



Fig. 31 - Frattura di volta a botte e arco conseguente a sovraccarichi derivati da costruzioni successive, Anagni (Roma)



Fig. 32 - Fratture nella volta della Parrocchia ed Ex Convento Di Santiago Apostolo, Jiutepec (Messico) conseguenti al terremoto del 2017

Per comprenderne la meccanica strutturale occorre partire da una trattazione della statica e della cinematica di un corpo costituito dall'assemblaggio di corpi rigidi connessi da vincoli semplici. Tali vincoli sono semplici nel senso che sono olonomi (il che comporta delle restrizioni sulle posizioni), puntuali (ovvero esprimibili come equazioni o disequazioni in termini di spostamento) e lineari.

Lo studio della cinematica in particolare è solitamente semplificato considerando piccoli spostamenti nell'intorno di una configurazione di riferimento conosciuta. Questo assunto consente di linearizzare la cinematica delle rotazioni ed infine di esprimere l'intero problema in un contesto di algebra lineare.

La formulazione matematica dell'intero problema richiede dunque la definizione di vincoli che possano essere considerati come restrizioni matematiche imposte sugli spostamenti dei punti di applicazione.

Per comprendere a pieno il problema in esame, ovvero quello della meccanica di blocchi rigidi connessi da vincoli, saranno prima richiamati il caso della cinematica di vincoli semplici bilaterali, come introduzione al caso dei vincoli unilaterali, ed in breve i concetti di moto di corpo rigido.

Moto di corpo rigido

Nella cinematica dei corpi rigidi, il cambio di posizione dei punti di un corpo B , può essere descritto come segue:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \quad (2.10)$$

con \mathbf{x} , posizione al tempo t di un punto la cui posizione nella configurazione di riferimento è \mathbf{X} . L'idea di questa relazione, anche definita come descrizione del moto lagrangiana, è di identificare i punti materiali di un corpo con il vettore posizione \mathbf{X} nella configurazione di riferimento e di individuare le nuove posizioni \mathbf{x} , a qualsiasi istante t , come funzione di \mathbf{X} .

Un particolare cambio di posizione è quello per il quale la mutua distanza in una qualsiasi coppia di punti non cambia. Tale moto prende il nome di moto di corpo rigido, per il quale la deformazione \mathbf{E} è pari a zero ad ogni istante t . In questo caso il cambio di posizione assume una forma particolare in cui il vettore posizione di riferimento \mathbf{X} appare linearmente:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_P + \mathbf{u}_P(t) + \mathbf{R}(t)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_P) \quad (2.11)$$

dove $\mathbf{u}_P(t) = \mathbf{x}_P(t) - \mathbf{X}_P$ rappresenta il vettore spostamento del punto P chiamato polo della descrizione di moto rigido ed il tensore rotazionale \mathbf{R} , rappresentato da una matrice 3x3 di componenti cartesiane, è il tensore ortogonale definito come:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I} \quad , \quad \det \mathbf{R} = 1 \quad (2.12)$$

con \mathbf{I} tensore identità.

Dunque in una descrizione di moto rigido possiamo identificare due parti: una parte traslatoria descritta dal vettore \mathbf{u}_P ed una parte rotazionale $\mathbf{R}(t)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_P)$.

È da sottolineare che poiché le rotazioni successive si combinano per prodotto matriciale e le traslazioni si combinano per somma, la traslazione può essere vista come un operatore lineare mentre la rotazione come un operatore non lineare.

È inoltre possibile introdurre una descrizione alternativa del moto di corpo rigido in termini di spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$, ossia:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}_P(t) + (\mathbf{R}(t) - \mathbf{I})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_P) \quad (2.13)$$

La scelta del polo P nella descrizione di moto rigido è arbitraria e viene fatta a seconda della convenienza. Nella dinamica dei moti rigidi, ad esempio, una scelta comune è quella di prendere P coincidente con G , baricentro del corpo B .

In qualsiasi problema, specie in quelli riguardanti la dinamica dei corpi rigidi, è cruciale avere una descrizione della velocità dei punti materiali di questo genere di corpi. Dal momento che la velocità è la derivata rispetto al tempo dello spostamento essa sarà espressa dalla seguente relazione:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_p(t) + \dot{\mathbf{R}}(t)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_p). \quad (2.14)$$

Dove $\dot{\mathbf{u}}_p$ è la velocità del polo ed $\dot{\mathbf{R}}$ è la forma della derivata temporale di \mathbf{R} che si determina facilmente per via geometrica o derivando la relazione precedentemente espressa $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$, che definiva \mathbf{R} come tensore ortogonale. Derivando si ottiene:

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Si nota che $(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)^T = \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T$, quindi dalla precedente equazione si otterrà:

$$\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = -(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)^T, \quad (2.16)$$

ciò significa che il tensore $\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T$ è emisimmetrico. Quindi:

$$\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = \mathbf{W} \in Skw, \quad (2.17)$$

con Skw insieme dei tensori emisimmetrici. Il tensore \mathbf{W} , come \mathbf{R} , ha tre sole componenti indipendenti e può essere espresso:

$$\{\mathbf{W}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.18)$$

con w_i componenti cartesiane del cosiddetto vettore $\boldsymbol{\omega}$ associato al tensore emisimmetrico \mathbf{W} . Il vettore $\boldsymbol{\omega}$, è chiamato velocità angolare: la sua direzione definisce l'asse di rotazione istantaneo e il suo modulo misura la velocità angolare intorno a questo asse.

Dalla precedente relazione si ricava:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{W}\mathbf{R} . \quad (2.19)$$

Riassumendo potremo scrivere:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{u}}_p(t) + \mathbf{W}(t) \mathbf{R}(t)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_p) , \quad (2.20)$$

Oppure

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{u}}_p(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{R}(t)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_p)) , \quad (2.21)$$

e, nella notazione euleriana, che prende come posizione di riferimento per i punti materiali la posizione attuale \mathbf{x} , si avrà:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}_p(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) . \quad (2.22)$$

Cinematica di una struttura “multi-body” con vincoli semplici bilaterali nel piano

Considerare una struttura S composta da n parti rigide Ω_i connesse da vincoli unilaterali o bilaterali significa studiare il comportamento di una struttura multi-body. Per semplicità si restringe lo studio al caso piano. In tal caso lo spostamento di ogni parte rigida Ω_i , sia esso finito o infinitesimo, può essere descritto da tre parametri: le due componenti della traslazione nel piano del polo P_i e l'angolo di rotazione della porzione considerata intorno all'asse ortogonale al piano.

Il problema cinematico per la struttura S è definito come la ricerca di uno spostamento di corpo rigido definito da un vettore $3n$ del tipo:

$$U = \{u(P_1), v(P_1), \varphi(P_1), \dots, u(P_n), v(P_n), \varphi(P_n)\} , \quad (2.23)$$

tale da soddisfare tutte le equazioni di vincolo, ovvero la ricerca di una soluzione del sistema di s equazioni lineari date dai vincoli.

Il problema può essere formulato come:

$$KU = E + \delta, \quad (2.24)$$

con E , δ vettori di s componenti, rappresentanti rispettivamente le deformazioni vincolari e le distorsioni del vincolo assegnate. K invece è una matrice $s \times 3n$, detta matrice cinematica.

Le equazioni cinematiche possono essere viste come una definizione delle deformazioni vincolari E in termini dello spostamento generalizzato U e di un vettore di distorsioni assegnato, indicato con δ :

$$E = KU - \delta. \quad (2.25)$$

Vincoli bilaterali indeformabili: unicità

Restringendo il campo al caso dei vincoli indeformabili ($E = 0$), si esaminerà il caso di vincoli indeformabili bilaterali, per i quali il problema cinematico consiste nella ricerca di uno spostamento U tale che:

$$KU = \delta. \quad (2.26)$$

L'unicità della soluzione del problema $KU = \delta$ è definita dal numero l :

$$l = 3n - r, \quad (2.27)$$

un numero intero non negativo chiamato "grado di labilità" della struttura S . Tale numero conta il numero di parametri indipendenti (ovvero parametri lagrangiani) necessari a descrivere piccoli spostamenti di S nell'intorno della configurazione di riferimento, sotto dati vincoli.

In particolare se $l = 0$, la soluzione esiste ed è unica, viceversa per $l > 0$ si potranno avere molteplici soluzioni in funzione dei parametri lagrangiani scelti.

Dinamica e statica di corpi "multi-body"

La dinamica di una struttura multi-body S sotto vincoli bilaterali semplici è governata dalle equazioni del moto di Eulero che sono una generalizzazione (per i corpi rigidi) della II legge di Newton per le particelle di massa.

Le leggi di Eulero essenzialmente dicono che la forza totale \mathbf{f}^i e il momento totale $\mathbf{m}^i(P_i)$ rispetto al polo P_i esercitate sul corpo Ω_i devono bilanciare rispettivamente la variazione nel tempo della quantità di moto di Ω_i e la variazione nel tempo del momento della quantità di moto di Ω_i rispetto a P_i .

La dinamica di una struttura S multi-body è un problema complesso governato da equazioni differenziali non lineari, dal momento che, per grandi spostamenti, da un lato è necessario utilizzare l'esatta cinematica delle rotazioni e dall'altro le equazioni dei vincoli possono diventare non lineari.

Restringendo l'analisi a piccoli spostamenti nell'intorno di una configurazione di riferimento, la dinamica di una struttura multi-body è estremamente semplificata, divenendo lineare sia nella descrizione del moto rigido che dei vincoli. La descrizione delle piccole oscillazioni di un pendolo rispetto alla sua configurazione di equilibrio verticale è un semplice esempio di questa approssimazione in cui i vincoli sono governati da un sistema lineare del tipo $KU = \delta$.

La dinamica di una struttura multi-body per la quale $l = 0$, risulta piuttosto banale in quanto, se non ci sono gradi di libertà, né la quantità di moto né il momento della quantità di moto, possono cambiare liberamente, essendo il movimento della struttura univocamente guidato dal dato $\delta(t)$.

In questo caso le equazioni di Eulero possono essere utilizzate in modo inverso per stimare le forze e i momenti prodotti dal dato $\delta(t)$.

Meno banale è il caso in cui $l > 0$, caso in cui le incognite del problema dinamico sono le storie temporali dei parametri lagrangiani, determinate dalle azioni di forza applicate e dalle condizioni iniziali di posizione e velocità.

2.3.4 Teoremi dell'analisi limite

Plasticità

Lo studio della plasticità insorge nel momento in cui consideriamo che le reazioni T associate ai vincoli siano limitate cioè:

$$-T_i^- \leq T_i \leq T_i^+, \quad (2.28)$$

dove T_i^- e T_i^+ rappresentano rispettivamente la resistenza a compressione e la resistenza a trazione dei vincoli i . Queste restrizioni definiscono un dominio convesso \mathbb{D} nello spazio \mathcal{R}^s e, in termini geometrici, si può dire che il vettore T ha un repertorio limitato di valori dal momento che deve appartenere a $\mathbb{D} \subset \mathcal{R}^s$.

Quando i valori limiti sono raggiunti, i vincoli possono deformarsi liberamente in maniera plastica, quindi possiamo scrivere:

$$E = KU - \delta, \quad (2.29)$$

dove E rappresenta la deformazione plastica. L'idea è che E sia zero se T è interno a \mathbb{D} , e che possa essere diverso da zero se T è sulla frontiera di \mathbb{D} . Se si applica la condizione per cui non ci può essere uno spostamento nella direzione di una possibile reazione allora, se la reazione si trova ad un limite superiore, cioè $T = T_i^+$, si può ammettere un "allungamento", cioè $E \geq 0$. Invece se la reazione è al limite inferiore, cioè $T = T_i^-$, si può ammettere un accorciamento, cioè $E \leq 0$. Tutto ciò può essere condensato in una singola condizione:

$$(\tilde{T} - T) \cdot E \leq 0, \forall \tilde{T} \in \mathbb{D}. \quad (2.30)$$

Tale condizione prende il nome di "condizione di normalità", dal momento che, se \mathbb{D} è un insieme convesso, questo implica che E sia ortogonale a \mathbb{D} . Per la condizione di normalità, E deve appartenere a \mathbb{D}' , l'insieme duale di \mathbb{D} . Se \mathbb{D} è compatto (chiuso e limitato) allora il duale di \mathbb{D} è $\mathbb{D}' \equiv \mathcal{R}^S$. Il tensore E non è ristretto e si può scegliere un qualunque $E \in \mathcal{R}^S$. In ogni caso, per ogni $E \in \mathbb{D}'$, si può determinare il corrispondente T , e il modulo dell'incremento $\Delta T = (\tilde{T} - T)$ che non compie lavoro per il corrispondente E . Un materiale definito dalle tre condizioni sopra descritte prende il nome di "materiale associato".

Teoremi dell'analisi limite: collasso

Come precedentemente accennato i teoremi dell'analisi limite rappresentano un valido strumento per lo studio del comportamento delle strutture in muratura. Sono legati alla possibilità che le strutture, sotto carichi assegnati, possano o meno accelerare spontaneamente. Le dislocazioni assegnate non hanno effetto alcuno in questo contesto in quanto si presume che siano piccole in rapporto alla geometria della struttura (ovvero che non comportino effetti sensibili sulla geometria della struttura di riferimento) e quasi statici, ovvero applicati così lentamente che gli effetti di accelerazione indotti dalla loro applicazione siano trascurabili. La possibilità di accelerare spontaneamente dalla configurazione di riferimento è chiamato "stato di collasso".

La possibilità di uno stato di collasso, ad esempio per vincoli bilaterali indeformabili, può essere rilevata in base al segno che la variazione di energia può assumere a causa di un atto di moto ammissibile con vincoli congelati, chiamato "meccanismo di collasso ammissibile".

Se la variazione di energia è positiva per ogni meccanismo ammissibile, allora la struttura non crolla. Al contrario, se è possibile trovare almeno un meccanismo ammissibile per il quale l'energia diminuisce, allora la struttura crollerà sotto carichi assegnati dal momento che non vi è possibilità di equilibrio.

L'energia per una struttura plastica in equilibrio sarà data dalla somma di energia potenziale dei carichi ed energia interna (che per un materiale plastico è la dissipazione Ψ) ovvero:

$$\mathcal{E}(U) = -f \cdot U + \Psi(U), \quad (2.31)$$

con

$$\Psi(U) = T(E(U)) \cdot E(U). \quad (2.32)$$

Si definisce δU come un meccanismo ammissibile, nonché elemento dell'insieme:

$$\delta \mathbb{K} = \{\delta U \in \mathcal{R}^{3n} \mid E(\delta U) = K\delta U, E(\delta U) \in \mathbb{D}'\}. \quad (2.33)$$

Allora un meccanismo di collasso sarà definito come $\delta U \in \delta \mathbb{K}$ tale che:

$$\mathcal{E}(\delta U) = -f \cdot \delta U + \Psi(\delta U) \leq 0. \quad (2.34)$$

Per un materiale plastico associato si possono dimostrare due condizioni che prendono il nome di “teoremi dell'analisi limite” (teorema statico e teorema cinematico).

Teorema statico

La struttura non può crollare sotto carichi assegnati, cioè:

$$-f \cdot \delta U + \Psi(\delta U) \geq 0, \forall \delta U \in \delta \mathbb{K}, \quad (2.35)$$

se $\mathbb{H} \neq \emptyset$.

Si definirà \mathbb{H} come l'insieme delle forze interne staticamente ammissibili:

$$\mathbb{H} = \{T \in \mathbb{D} \subset \mathcal{R}^s \mid HT = f\}. \quad (2.36)$$

Si ammette per assurdo che la struttura possa collassare, cioè che esista $\delta U \in \delta\mathbb{K}$ tale che

$$\mathcal{E}(\delta U) = -f \cdot \delta U + \Psi(\delta U) \leq 0, \quad (2.37)$$

nonostante $\mathbb{H} \neq \emptyset$. Se $\mathbb{H} \neq \emptyset$, allora esiste almeno un $\tilde{T} \in \mathbb{D} \subset \mathcal{R}^s$ tale che $H\tilde{T} = f$. Quindi si può scrivere:

$$-f \cdot \delta U = -H\tilde{T} \cdot \delta U = -\tilde{T} \cdot K\delta U = -\tilde{T} \cdot E(\delta U). \quad (2.38)$$

Ricordando che $\Psi(\delta U) = T \cdot E(\delta U)$, sostituendo nella disequazione energetica

$$\mathcal{E}(\delta U) = -\tilde{T} \cdot E(\delta U) + T \cdot E(\delta U) \leq 0, \quad (2.39)$$

otteniamo

$$(T - \tilde{T}) \cdot E(\delta U) \leq 0, \quad (2.40)$$

che è una contraddizione dal momento che $\tilde{T} \in \mathbb{D}$, e per la normalità:

$$(T - \tilde{T}) \cdot E \leq 0, \forall \tilde{T} \in \mathbb{D}. \quad (2.41)$$

Tale teorema prende anche il nome di “safe theorem” dal momento che viene utilizzato per dimostrare che la struttura è in condizioni di sicurezza e non collassa sotto dei carichi assegnati. Per provare ciò è sufficiente individuare un qualunque stato \tilde{T} che bilanci le forze esterne e sia interno ad una regione fattibile \mathbb{D} .

Teorema cinematico

Se esiste un $\delta U \in \mathbb{K}$ tale che:

$$\mathcal{E}(\delta U) = -f \cdot \delta U + \Psi(\delta U) \leq 0, \quad (2.42)$$

allora $\mathbb{H} = \emptyset$,

Si tratta dunque di una negazione delle affermazioni introdotte con il teorema statico. Tale teorema prova che la struttura non si trova in condizioni di sicurezza e collassa sotto i carichi assegnati dal momento che non vi è possibilità di equilibrio. Per provare ciò sarà sufficiente individuare un qualunque meccanismo $\delta U \in \mathbb{K}$ tale che: $f \cdot \delta U \geq \Psi(\delta U)$.

Cinematica di una struttura “multi-body” sotto vincoli semplici unilaterali

Si consideri ora una struttura S composta da n parti rigide Ω_i connessa da vincoli semplici e soggetta all'azione di dislocazioni δ e di carichi f . Ammettiamo che i vincoli possano essere unilaterali o bilaterali. I vincoli semplici unilaterali vengono espressi come disuguaglianze lineari in termini di posizione dei punti delle parti Ω_i . Poiché ogni uguaglianza può essere espressa come una doppia disuguaglianza, allora un vincolo bilaterale può essere visto come equivalente ad una coppia di vincoli unilaterali.

Pertanto si può considerare un sistema multi-body S soggetto ad un numero $s = 2s^b + s^u$ di vincoli unilaterali in cui s^b è il numero totale di equazioni date dai vincoli bilaterali e s^u è il numero totale di disequazioni date dai vincoli unilaterali.

Tutti i vincoli imposti su S possono essere scritti in forma algebrica come:

$$E = KU - \delta \geq 0 \quad (2.43)$$

dove K è la matrice cinematica $s \times 3n$ mentre δ rappresenta il vettore di s componenti dei cedimenti e delle distorsioni assegnate.

Il problema cinematico di una struttura S sotto vincoli unilaterali s è definita come la ricerca di uno spostamento generalizzato di corpo rigido che soddisfi tutte le disequazioni di vincolo, cioè un vettore $3n$:

$$U = \{u(P_1), v(P_1), \varphi(P_1), \dots, u(P_n), v(P_n), \varphi(P_n)\}, \quad (2.44)$$

appartenente ad un insieme di spostamenti cinematicamente ammissibili:

$$\mathbb{K} = \{U \in \mathcal{R}^{3n} \mid E(U) = KU - \delta \geq 0\}. \quad (2.45)$$

L'essenza del comportamento dei vincoli unilaterali è che i vincoli sono deformabili ma la deformazione dei vincoli $E(U)$ è unilaterale non negativa. Quindi sotto tali vincoli va riconsiderato il concetto dei gradi di libertà, dal momento che il sistema può ammettere degli spostamenti (ovvero può avere una labilità $l > 0$) anche in presenza di un numero s di vincoli indipendenti ben più grande di $3n$.

Nel caso di vincoli bilaterali l'insieme \mathbb{K} coincide con la traslazione \mathcal{R}^l (con $l = 3n - s$) se tutti i vincoli sono indipendenti, ma, nell'equilibrio, tutti gli elementi di un tale insieme corrispondono allo stesso valore dell'energia potenziale ovvero non possono essere relazionati al carico f dal momento che in campo energetico risultano tutti uguali.

Nel caso di vincoli unilaterali, se c'è equilibrio, l'energia potenziale cresce man mano che U viene spostato da uno stato di equilibrio, allora si può selezionare una ristretta classe di spostamenti U partendo dall'idea che l'equilibrio corrisponde ad un minimo dell'energia potenziale ovvero minimizzando l'energia potenziale nell'insieme \mathbb{K} .

Forze e reazioni

In generale la scrittura delle equazioni di equilibrio per un corpo multi-body prevede che le forze che agiscono sulla struttura vengano specificate. Tali forze si distinguono in forze esterne assegnate e reazioni legate ai vincoli.

Per vincoli unilaterali lisci vi è una doppia forza di reazione associata ad ogni vincolo. Se il vincolo è semplice ed unilaterale la reazione è applicata al punto vincolato ed è unilaterale cioè può servirsi di un solo verso. In un vincolo relativo applicando la III legge di Newton le forze di reazione nei due punti connessi dal vincolo sono considerati come direttamente opposti cioè uguali, opposti e con la stessa linea d'azione.

Diagramma di corpo libero

Una chiara rappresentazione delle forze che agiscono sulle parti Ω_i che compongono la struttura si ottiene eliminando tutti i vincoli e sostituendo ad essi le loro reazioni. Se questo viene fatto per tutti i vincoli si crea un sistema a corpo libero in cui ogni parte Ω_i appare come isolata dalle altre e soggetta a forze esterne note e reazioni sconosciute.

Si scrivono quindi le equazioni di equilibrio per ogni parte, in totale $3n$ equazioni algebriche, dove le incognite primarie sono le reazioni dei vincoli:

$$T = \{T_1, T_2, \dots, T_S\}. \quad (2.46)$$

L'equilibrio è regolato da $3n$ equazioni cioè dalle $2+1$ forme omogenee scalari delle equazioni di Eulero per ogni parte che compone la struttura. Le incognite ora sono le reazioni e le condizioni che limitano le equazioni algebriche lineari.

Si può dunque formalizzare il problema dell'equilibrio in forma algebrica come:

$$HT = f, \quad (2.47)$$

dove $T = \{T_1, T_2, \dots, T_S\}$ è il vettore s delle reazioni sconosciute, H la matrice di equilibrio $3n \times s$ ed f il vettore $3n$ di forze esterne assegnate (cioè le due componenti della forza risultante e del momento risultante rispetto al polo P_i delle forze applicate alle n parti Ω_i che compongono la struttura).

Problema statico

Il problema statico per la struttura S sotto vincoli unilaterali s è definita come la ricerca di una reazione generalizzata:

$$T = \{T_1, T_2, \dots, T_S\}, \quad (2.48)$$

che soddisfa l'equilibrio

$$HT = f \quad (2.49)$$

e le disequazioni di vincolo:

$$T \leq 0, \quad (2.50)$$

cioè per un vettore T appartenente all'insieme di reazioni staticamente ammissibili:

$$\mathbb{H} = \{T \in \mathcal{R}^s \mid HT = f \text{ e } T \leq 0\}. \quad (2.51)$$

Capitolo 3

COMPORTAMENTO DINAMICO DELLE STRUTTURE IN MURATURA

L'eccezionale resilienza di molte costruzioni in muratura, ovvero la loro capacità di resistere nei secoli sotto gli impulsi più diversi dell'uomo e dell'ambiente, dimostra che le sollecitazioni a cui sono state sottoposte risultano spesso inferiori rispetto a quelle necessarie a provocare la loro instabilità.

Tuttavia le conseguenze disastrose che alcuni sismi hanno provocato su parte del patrimonio storico italiano hanno dimostrato la necessità di individuare un approccio corretto per lo studio del comportamento dinamico di queste strutture, modellate come strutture "multi-body" soggette a vincoli unilaterali.

Spesso la resistenza alle azioni orizzontali di strutture soggette a vincoli unilaterali è studiata con un approccio di tipo quasi-statico che consente di individuare la soglia minima delle sollecitazioni, oltre la quale si verifica l'instabilità della struttura.

Questo approccio fornisce tuttavia una condizione "necessaria" ma non "sufficiente" per il crollo effettivo della struttura poiché si riferisce soltanto ad uno stato incipiente del moto [28].

Al fine di comprendere l'effettivo comportamento dinamico di tali strutture e quindi identificarne l'effettiva capacità dinamica, sarà necessario prima di tutto selezionare i contributi scientifici già svolti in questo campo partendo dallo studio di un singolo blocco per poi passare alla composizione di blocchi in strutture più complesse, come le strutture ad arco e voltate.

In effetti lo studio di ricognizione a seguito di forti terremoti include il sollevamento, l'oscillazione o il ribaltamento di una varietà di strutture. La necessità di comprendere questi fenomeni e di prevederli tentando di stimare l'entità dei movimenti del suolo ha motivato una serie di ricerche sulla risposta all'oscillazione di blocchi rigidi.

Il primo studio sistematico sulla risposta dinamica di un blocco rigido poggiato su una base e sottoposto ad una accelerazione orizzontale è stato introdotto da Housner [29].

Questo lavoro ha motivato ulteriori approfondimenti alcuni dei quali tesi a sviluppare una metodologia pratica per calcolare lo spostamento massimo dell'oscillazione studiando un oscillatore ad un grado di libertà con smorzamento costante e periodo dipendente dall'ampiezza dell'oscillazione [30].

In generale quando un blocco rigido oscilla, si presume che la rotazione si sviluppi da una estremità all'altra della base. Questo vincolo, in combinazione con la conservazione del momento angolare, richiede una perdita di energia durante l'impatto. La perdita netta di energia durante l'impatto si traduce in una riduzione istantanea della velocità angolare quando la rotazione si inverte. L'esistenza del movimento oscillatorio è intrinsecamente associata allo smorzamento. Quindi la risposta oscillante di un blocco rigido ("inverted pendolum") viene confrontata con la risposta oscillatoria di un oscillatore SDOF smorzato ("regular pendolum") (Fig. 33). Tali concetti presentano molte differenze: nell'ambito delle relazioni costitutive, ad esempio, il meccanismo di ripristino dell'oscillatore SDOF (Single Degree of Freedom) ha origine dall'elasticità della struttura, mentre il meccanismo di ripristino del blocco oscillante ha origine dalla gravità.

Altre differenze fondamentali risiedono nella struttura meccanica di questi due sistemi. L'oscillatore SDOF ha una rigidità k positiva e finita, e l'energia viene dissipata quando la curva forza-spostamento forma un sistema chiuso. Al contrario, il blocco che oscilla ha una rigidità infinita fino a che l'entità del momento applicato raggiunge il valore $mgR\sin\alpha$ e, una volta che il blocco oscilla, la sua rigidità assume un valore negativo e decresce raggiungendo lo zero quando l'angolo di rotazione ϑ eguaglia la snellezza del blocco α [31].

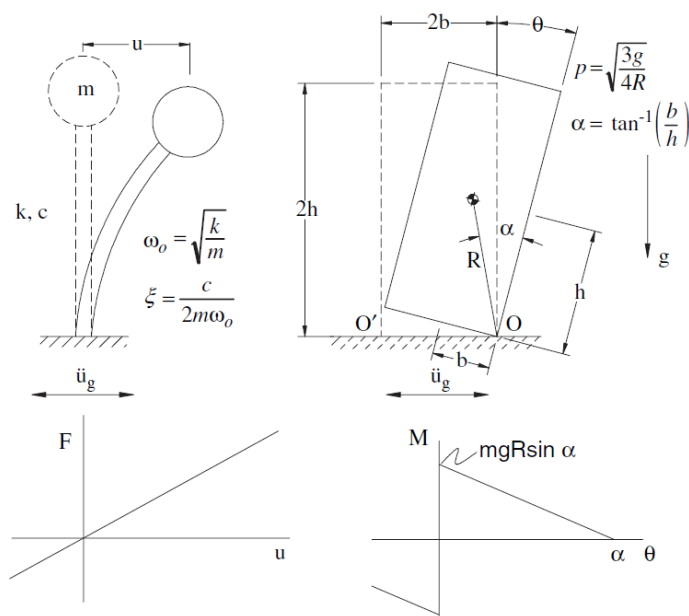


Fig. 33 - Schema di un oscillatore ad un grado di libertà e relativo diagramma forza-spostamento (a sinistra); schema di un blocco che oscilla e relativo diagramma momento-rotazione (a destra) [31]

3.1 Risposta sismica per una struttura continua: l'oscillatore semplice

Come precedentemente accennato, e come riportato anche da Normativa, la risposta sismica di alcuni elementi e conseguentemente anche di strutture assimilabili a modelli di corpo continuo viene rappresentata a partire dall'analisi della risposta dinamica di un oscillatore semplice.

Si tratta di un sistema ad un grado di libertà costituito da una massa m connessa al suolo da una molla di rigidezza k e smorzamento c .

La trattazione matematica del moto libero di un oscillatore semplice richiede la scrittura di una relazione che esprima nel generico istante t , l'equilibrio tra la forza di richiamo, l'azione inerziale e la forza di smorzamento. Indicato con $u(t)$ lo spostamento della massa, la forza di richiamo elastico vale $-ku$, la forza d'inerzia è data dal prodotto tra massa m e accelerazione \ddot{u} mentre la forza di smorzamento è data dal prodotto tra coefficiente di smorzamento c e velocità \dot{u} (Fig. 34).

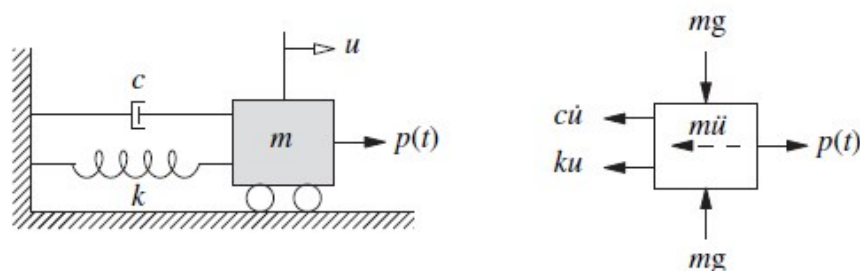


Fig. 34 - Sistema massa-molla-smorzatore [32].

L'equilibrio dinamico di questo sistema soggetto a forze esterne $p(t)$ permette di ottenere la seguente equazione:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + ku = p(t). \quad (3.1)$$

Nel caso di accelerazione al suolo $\ddot{u}_g(t)$, dividendo l'equazione per m si ottiene la specifica equazione:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = -\ddot{u}_g(t) \quad (3.2)$$

dove $\xi = c/2m\omega_n$ è il rapporto di smorzamento viscoso e $\omega_n = \sqrt{k/m}$ è la frequenza naturale non smorzata.

Le procedure per la risoluzione di queste equazioni differenziali del secondo ordine sono trattate da diversi autori [32] [33]; un possibile approccio è quello che prevede l'utilizzo dell'integrale di Duhamel. Nel caso di condizioni iniziali $u(0) = u_0$ e $du(0)/dt = v_0$, la risposta sarà data da:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} \left(u_0 \cos\omega_D t + \frac{v_0 + u_0\xi\omega}{\omega_D} \sin\omega_D t \right) \quad (3.3)$$

con $\xi = c/c_{cr}$, $c_{cr} = 2\sqrt{k m}$, $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$.

A partire dall'analisi della risposta dinamica dell'oscillatore semplice si individua lo spettro di risposta elastico che, insieme al fattore di struttura, costituisce uno degli elementi utili per rappresentare la risposta sismica di strutture assimilabili a modelli di corpo continuo.

Lo spettro di risposta elastico è uno strumento analitico in grado di sintetizzare la risposta di una struttura ad un assegnato terremoto. Così facendo si possono schematizzare strutture reali, come mostrato in figura 35 utilizzando le necessarie semplificazioni (considerando ad esempio che il traverso del telaio sia indeformabile estensionalmente in modo da avere uno stesso spostamento orizzontale per tutti i punti che ad esso appartengono).

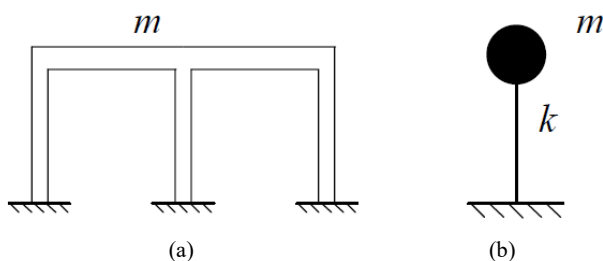


Fig. 35 - Modello schematico di un telaio (a) a cui viene associato un modello di calcolo corrispondente allo schema dell'oscillatore semplice (b) [34]

In generale la complessità nel determinare la risposta sismica di una struttura risiede nel conoscere le caratteristiche degli accelerogrammi di un evento sismico registrati in prossimità alla struttura stessa.

Gli eventi sismici, per loro natura, infatti, sono caratterizzati da una forte irregolarità e le storie temporali delle accelerazioni dipendono da diversi fattori di difficile

interpretazione quali la natura del meccanismo di rottura, il percorso compiuto dalle onde sismiche, le proprietà meccaniche degli strati di terreno attraversati. Per una stessa area geografica si potranno avere storie temporali di accelerazioni notevolmente diverse l'una dall'altra.

Per questo motivo lo spettro sismico fornito dalla Normativa è il risultato di uno studio di tipo statistico atto a definire uno spettro che possa essere rappresentativo di uno specifico sito.

Si tratta di un grafico di forma regolare che riporta sull'asse delle ascisse il periodo proprio dell'oscillatore e sull'asse delle ordinate la pseudo accelerazione massima.

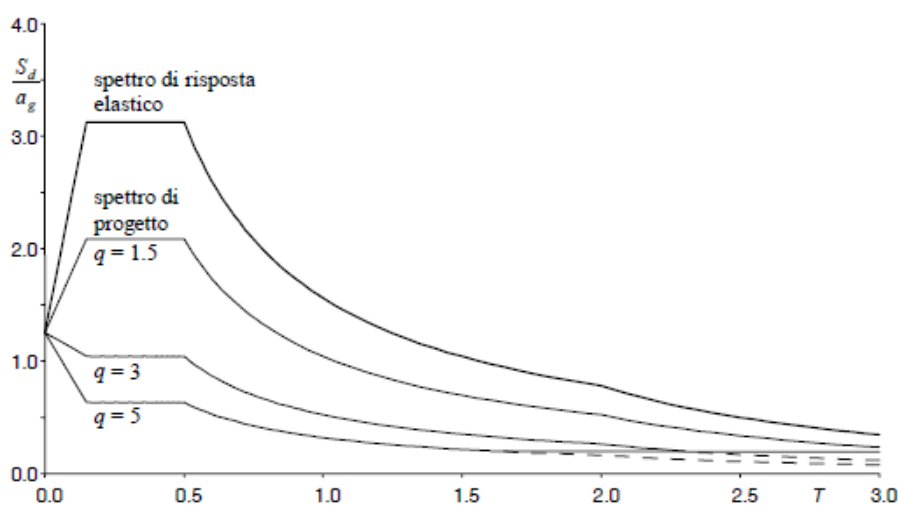


Fig. 36 - Spettro elastico e spettri di progetto ottenuti al variare del fattore di struttura q [34]

In questo modo la massima azione inerziale viene valutata moltiplicando la massa m per il valore letto nello spettro di risposta in corrispondenza del periodo proprio della struttura.

In fase di progettazione tuttavia la Normativa consente di valutare le strutture in campo plastico e di scalare quindi lo spettro di risposta elastico attraverso un fattore denominato fattore di comportamento q (che dipende dal materiale utilizzato, dalle tecniche costruttive, dal tipo di struttura) ottenendo in questo modo lo spettro di progetto (Fig. 36).

Esaminando il caso specifico delle strutture in muratura la Normativa propone l'utilizzo di metodi di analisi limite con cui valutare la resistenza utilizzando fattori di comportamento differenti a seconda della tipologia muraria presa in esame (si veda § 7.8 in [35]).

3.2 Dinamica delle strutture a blocchi: il rocking

L'approccio qui analizzato (proposto a partire da Housner [29] e ripreso successivamente da Makris [36]) applicato ai modelli è quello che associa alle strutture in muratura il modello del pendolo inverso. Per comprenderne il funzionamento si fa riferimento al lavoro pionieristico di Housner che nel 1963 ha analizzato la dinamica di un blocco singolo posizionato su un piano rigido soggetto ad una azione orizzontale. L'ipotesi è che non vi sia scorrimento e che il blocco, considerato come un sistema ad un grado di libertà (SDOF), ruoti intorno ai due punti alla base O ed O' (Fig. 37).

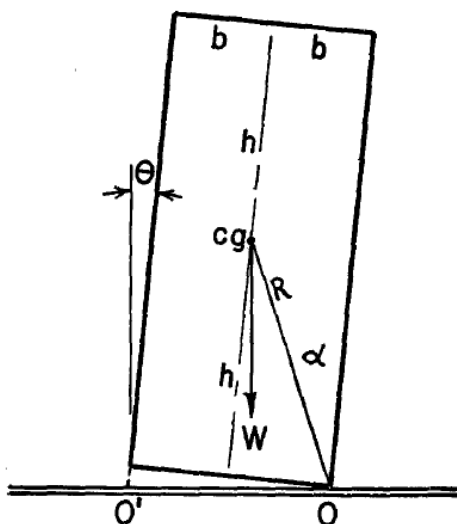


Fig. 37 - Il "Rocking block" di Housner

I principali parametri geometrici che influenzano la risposta del *rocking* sono due: il rapporto di snellezza α , cioè l'arctangente dello spessore all'altezza $2b/2h$; e il vettore raggio R , che collega il punto di rotazione al centro di massa del blocco.

Si tiene conto che per un qualunque tipo di sistema materiale valgono le equazioni cardinali della dinamica:

$$\frac{dU}{dt} = R^{(e)}, \quad (3.4)$$

$$\frac{dK}{dt} + v_o + U = M^{(e)}, \quad (3.5)$$

dove U è il risultante della quantità di moto e K è il momento della quantità di moto, o momento angolare, rispetto ad un qualsiasi punto O , di velocità v_o . Invece $R^{(e)}$ ed $M^{(e)}$ sono rispettivamente il risultante ed il momento risultante, rispetto allo stesso punto O , delle sole forze esterne.

Introducendo il momento di inerzia polare $I = \frac{4}{3} m R^2$ (dove m è la massa del sistema), Housner scrive l'equazione del moto:

$$I_0 \ddot{\vartheta} = -mgR \operatorname{sen}(\alpha - \vartheta). \quad (3.6)$$

Nel caso di blocchi snelli ($\alpha < 0$) è possibile approssimare il seno con l'angolo stesso ottenendo in questo modo la relazione:

$$I_0 \ddot{\vartheta} = mgR(\alpha - \vartheta), \quad (3.7)$$

ovvero

$$\ddot{\vartheta} = -p^2 \alpha + p^2 \vartheta, \quad (3.8)$$

con $p^2 = (mgR)/I_0$.

Per le condizioni $\vartheta = \vartheta_0$, $\dot{\vartheta} = 0$, $t = 0$, che corrispondono alle condizioni in cui il blocco da fermo ruota inizialmente di ϑ_0 , la soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine sarà:

$$\vartheta = \alpha - (\alpha - \vartheta_0) \cosh pt. \quad (3.9)$$

Tale soluzione descrive la rotazione del blocco intorno al polo O (Fig. 37).

Va considerato che durante l'oscillazione si verificherà una dissipazione di energia dovuta all'impatto del blocco al suolo. Se l'impatto è assunto anelastico, ovvero senza rimbalzo, il momento della quantità di moto si conserverà e la riduzione di energia cinetica si potrà scrivere attraverso un parametro definito coefficiente di restituzione r :

$$r = \left(\frac{\dot{\vartheta}_2}{\dot{\vartheta}_1} \right)^2. \quad (3.10)$$

$\dot{\vartheta}_1$ e $\dot{\vartheta}_2$ rappresentano rispettivamente l'energia cinetica pre impatto e post impatto. Nel caso di un blocco singolo, eguagliando il momento della quantità di moto intorno a O' (Fig. 37) immediatamente prima dell'impatto con il momento della quantità di moto dopo l'impatto, si ottiene:

$$r = \left[1 - \frac{mR^2}{I_0} (1 - \cos 2\alpha) \right]^2. \quad (3.11)$$

Il coefficiente di restituzione dipende dunque dal rapporto di snellezza α : maggiore è la snellezza, maggiore è il numero di impatti necessari per ottenere la stessa perdita di energia per la stessa azione in ingresso. Un valore di $r = 0$ indica un impatto totalmente anelastico, mentre $r = 1$ indica un impatto perfettamente elastico.

Sull'identificazione del coefficiente di restituzione sono stati condotti negli anni diverse prove sperimentali su campioni di muratura non rinforzata [37], campioni di diversi materiali da costruzione e diversi rapporti di snellezza [38]. Gli studi condotti hanno dimostrato tuttavia che piccole irregolarità sulle superfici che si scontrano producono notevoli differenze tra il valore del coefficiente di restituzione teorico e quello sperimentale; così come la scelta del materiale di interfaccia [39] influenza fortemente la dissipazione nel comportamento di oscillazione libera.

In [29] Housner analizza inoltre la dinamica del blocco sottoposto ad impulso costante, sinusoidale e ad impulso simico. Viene chiarito anche l'effetto scala con la conseguente dipendenza della resistenza del blocco dalle sue dimensioni.

Questi concetti verranno ripresi da Makris [36] [40] che circa mezzo secolo dopo Hosuner spiegherà come l'aumento della stabilità sismica delle strutture snelle all'aumentare delle loro dimensioni deriva dalla difficoltà di mobilitare l'inerzia rotazionale della colonna libera.

Makris considera un blocco rettangolare soggetto ad eccitazione sismica \ddot{u}_g per cui diversamente da ciò che accadrebbe per una analisi condotta con un carico quasi-statico (vale a dire con una accelerazione in lento aumento e quindi con un conseguente momento di inerzia rotazionale trascurabile poiché $\ddot{\vartheta}(t) = 0$) il blocco subirà un'accelerazione rotazionale finita $\ddot{\vartheta}(t) \neq 0$.

Dall'equilibrio dinamico dei momenti si avrà:

$$\underbrace{-m\ddot{u}_g(t)R\cos[\alpha - \vartheta(t)]}_{\text{MOMENTO RIBALTANTE}} = I_0\ddot{\vartheta}(t) + \underbrace{mgR\sin[\alpha - \vartheta(t)]}_{\text{MOMENTO STABILIZZANTE}} \quad (3.12)$$

Nel caso di blocchi rettangolari l'inerzia rotazionale varrà $I_0 = (4/3)(mR^2)$, per cui la (3.12) si scriverà:

$$-\ddot{u}_g(t)R\cos[\alpha - \vartheta(t)] = \frac{4}{3} R^2\ddot{\vartheta}(t) + gR\sin[\alpha - \vartheta(t)]. \quad (3.13)$$

L'equazione (3.13) indica che quando una colonna snella viene messa in movimento oscillatorio, la domanda sismica (momento sismico di ribaltamento) è proporzionale ad R (seconda potenza della dimensione), mentre la resistenza sismica (opposizione alla sollecitazione) è proporzionale ad R^2 (seconda potenza della dimensione). Di conseguenza, l'equazione (3.13) impone che, indipendentemente dalla snellezza delle colonne (valori α più piccoli indicano colonne più snelle) e dall'intensità dell'azione sismica, quando una colonna che oscilla ($\ddot{\vartheta}(t) = finita$) è sufficientemente grande, la seconda potenza di R (resistenza sismica) sul lato destro dell'equazione può sempre assicurare la stabilità (si veda Fig. 38).

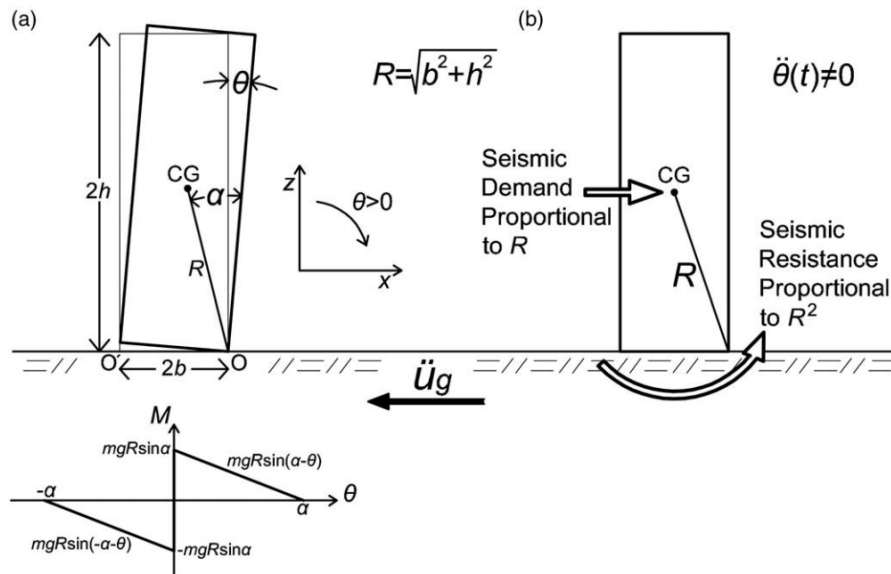


Fig. 38 - (a) Caratteristiche geometriche di una colonna singola oscillante e relativo diagramma di rotazione dei momenti. (b) Durante l'azione che mette la colonna in movimento oscillatorio ($\ddot{\vartheta}(t) \neq 0$), la resistenza sismica è proporzionale ad R^2 , e la domanda sismica è proporzionale a R . Di conseguenza, quando una colonna libera al suolo è sufficientemente grande ($R = \sqrt{b^2 + h^2}$) può sopravvivere a grandi accelerazioni orizzontali anche se è molto snella [40].

3.2.1 La risonanza nelle strutture rocking

Nello studio delle strutture rocking il collasso è raggiunto a seguito del ribaltamento dovuto al movimento oscillatorio.

Una crescente attenzione è stata recentemente focalizzata sull'identificazione delle peggiori condizioni di ingresso che possono generare la risposta risonante dei blocchi.

Casapulla et al. [41] hanno introdotto un accelerogramma limite artificiale come sequenza di impulsi istantanei di Dirac per rappresentare gli effetti più sfavorevoli sul blocco oscillante nella fase intensa di un terremoto.

Dallo studio condotto, la risposta critica del blocco all'accelerogramma proposto, rappresentato dal raggiungimento del ribaltamento, risulta essere influenzata principalmente dai seguenti aspetti: l'effetto dell'ampiezza degli impulsi principali; il ruolo delle dimensioni e della snellezza del blocco rigido; il ruolo opposto giocato dagli impulsi intermedi; l'influenza della sequenza secondaria sulla durata dei cicli di moto.

Su questa linea DeJong in [42] definisce un accelerogramma teorico con la condizione di massimizzazione dell'energia in ingresso. Si tratta di una funzione di passo con un segno alternato, sempre opposto alla velocità di rotazione del blocco.

Lo studio di DeJong parte dall'analisi del quantitativo di energia che la struttura dovrà raggiungere per diventare instabile. Il tasso di energia in ingresso, derivato dalle teorie di Housner, si otterrà dalla seguente relazione:

$$\frac{dE}{dt} = -mR\ddot{u}_g\theta' \cos[\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta], \quad (3.14)$$

L'equazione rivela che la quantità di energia in ingresso cambia con l'accelerazione al suolo \ddot{u}_g , la velocità angolare θ' e l'angolo di rotazione θ . Inoltre affinché l'energia possa essere aggiunta al sistema, l'accelerazione al suolo dovrà essere di segno opposto alla velocità angolare.

Per studiare i movimenti al suolo a cui sono più vulnerabili le strutture DeJong [42] procede con metodi di ottimizzazione che possano massimizzare l'energia in entrata.

Imponendo il vincolo che il valore assoluto dell'accelerazione del terreno non possa superare un dato valore a_g , l'ottimizzazione del movimento del terreno sarà ottenuta risolvendo:

$$\ddot{u}_g^{opt} = \max \left\{ \int_t^{t+\Delta t} -mR\ddot{u}_g\theta' \cos[\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta] dt \right\}. \quad (3.15)$$

Il risultato, per assegnate condizioni iniziali e geometria del blocco, è una funzione a gradini che alterna a_g ad un intervallo di tempo che aumenta all'aumentare dell'angolo di rocking (Fig. 39).

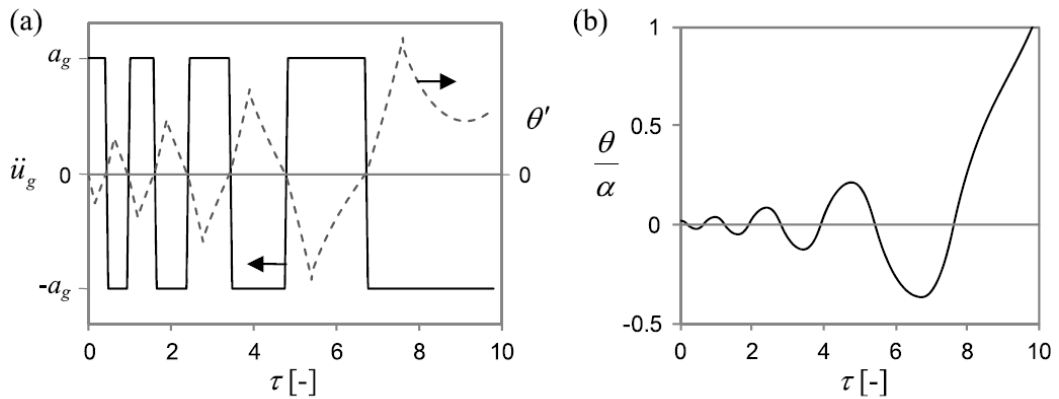


Fig. 39 - Risultati dell'energia di ottimizzazione: (a) accelerazione al suolo ottimizzata (linea continua) e velocità angolare (linea tratteggiata), e (b) risposta del blocco *rocking* [42]

Per rendere più realistica la funzione, si aggiunge il vincolo di funzione sinusoidale per cui l'accelerazione istantanea al suolo che massimizza l'apporto di energia diventa:

$$\ddot{u}_g^{opt} = -a_g \operatorname{sgn}(\theta') \cos \left[\sin^{-1} \left(\frac{|\theta|}{\theta_{amp}} \right) \right]. \quad (3.16)$$

Per la stessa geometria del blocco e le stesse condizioni iniziali usate nella figura 39, si ricava il moto sinusoidale ottimizzato che provoca la risonanza durante il *rocking* (come mostrato nella figura 40).

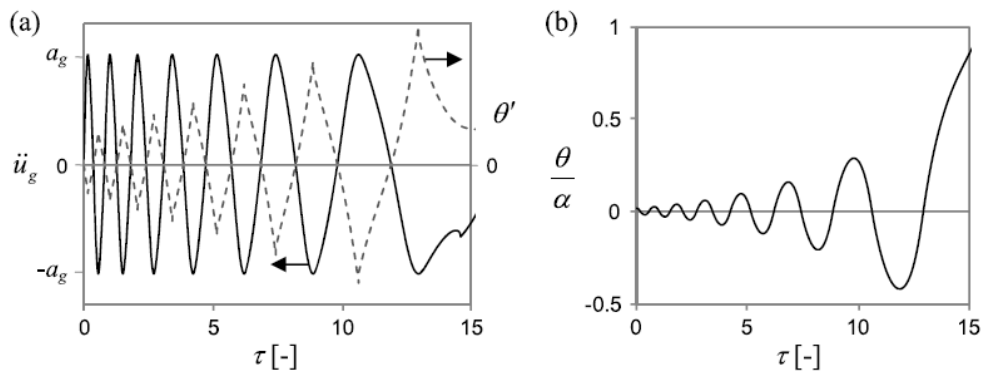


Fig. 40 - Risultati di risonanza a oscillazione sinusoidale: (a) accelerazione al suolo ottimizzata (linea solida) e velocità angolare del blocco (linea tratteggiata), e (b) risposta del blocco oscillante [42]

La frequenza decrescente dell'accelerazione al suolo (Fig. 40a) è caratteristica di un segnale "chirp" (o più specificamente "down-chirp") ovvero di un segnale modulato di frequenza in cui la frequenza istantanea varia linearmente con il tempo. Quindi i dati della simulazione sono stati adattati con vari segnali "chirp" al fine di ottenere una funzione "chirp".

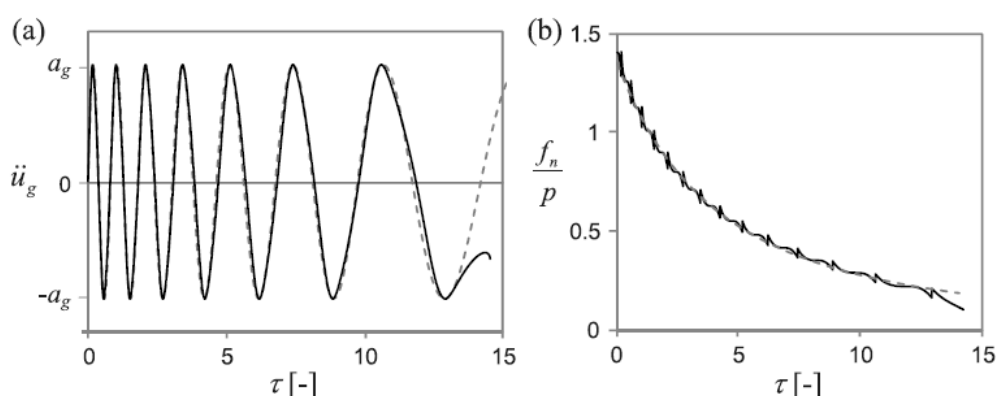


Fig. 41 - Adattamento proiettivo del segnale chirp (linea tratteggiata) dei dati del simulatore di risonanza a dondolo (linea solida): (a) accelerazione al suolo e (b) frequenza naturale di oscillazione adimensionale [42]

Dalla figura 41b che mostra risultati ottenuti dalle simulazioni effettuate tramite funzione "chirp" emerge che la frequenza naturale istantanea diminuisce con il tempo.

Questi risultati ribadiscono che le strutture oscillanti non hanno una frequenza naturale fissa e quindi non possono essere forzate ad una singola frequenza che causa risonanza.

Di conseguenza, la risposta delle strutture rigide a blocco oscillante ai movimenti di terra armonici a frequenza costante è in qualche modo irrilevante quando si cerca di determinare il caso peggiore di risposta al terremoto.

In questo lavoro DeJong studia la risposta delle strutture rocking sottoponendole anche ad impulsi sinusoidali multipli e "time histories" di terremoti per analizzare un eventuale effetto amplificato.

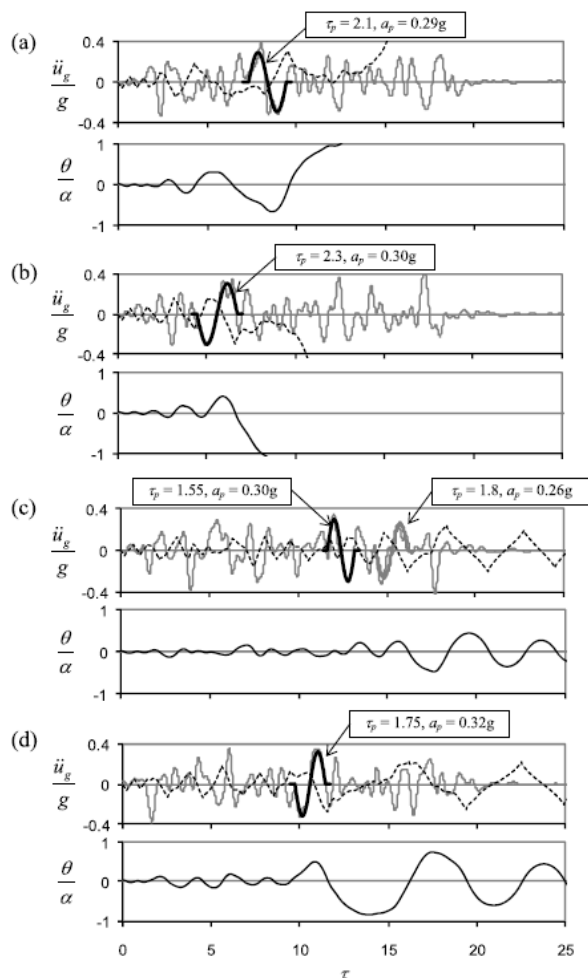


Fig. 42 - Terremoti generati (MMI = 6, $t_d \approx 3$ s), gli impulsi primari associati (linee spesse), e le risultanti risposte del blocco di oscillazione ($\theta(0) = \alpha/32$). Angolo di oscillazione (θ/α) e velocità angolare (linea tratteggiata) per un blocco specifico ($B/H = 0.25$) [42]

La figura 42 riporta i risultati in termini di angolo di rotazione (θ/α) per uno specifico blocco ($B/H = 0.25$) sottoposto a impulsi sismici. Nei primi due casi (42a e 42b) il blocco si ribalta; negli ultimi due casi (42c e 42d) il blocco oscilla per poi tornare nella configurazione originaria. E' noto che i blocchi sono più suscettibili per impulsi di durata maggiore e, come ci si aspetterebbe, gli impulsi primari più lunghi dei primi due casi (evidenziati in grassetto in Fig.42) contribuiscono al collasso.

I risultati mostrano però come in realtà, sebbene in alcuni casi l'amplificazione si sia verificata per effetto di impulsi consecutivi, tuttavia essa risulta fortemente influenzata da: spaziatura, intensità e durata degli impulsi successivi.

E' quindi impossibile prevedere l'esatta risposta di un blocco oscillante ad un possibile terremoto che è essenzialmente un insieme di impulsi consecutivi con caratteristiche estremamente diverse.

Tuttavia ciò che è chiaro da queste analisi è che una previsione accurata degli impulsi sismici primari è fondamentale per prevedere efficacemente il collasso per oscillazione.

3.3 Considerazioni sulla risposta sismica dei due oscillatori

Parallelamente allo spettro di risposta elastico per l'oscillatore semplice di cui al §3.1, si può definire uno spettro per il blocco che oscilla. Si tratta di uno spettro che analizza differenti valori di snellezza $\alpha = \tan^{-1}(b/h)$ in cui la velocità angolare e di rotazione sono funzione del periodo $T = 2\pi/p$. L'osservazione più rilevante che deriva dal confronto dei due spettri in figura 43 è che gli spostamenti degli oscillatori lineari aumentano all'aumentare del periodo naturale $T_0 = 2\pi/\omega_0$, raggiungono un massimo, e successivamente convergono verso lo spostamento al suolo; mentre le rotazioni delle strutture oscillanti diminuiscono in maniera quasi monotona, man mano che il loro 'periodo' apparente $2\pi/p$ aumenta.

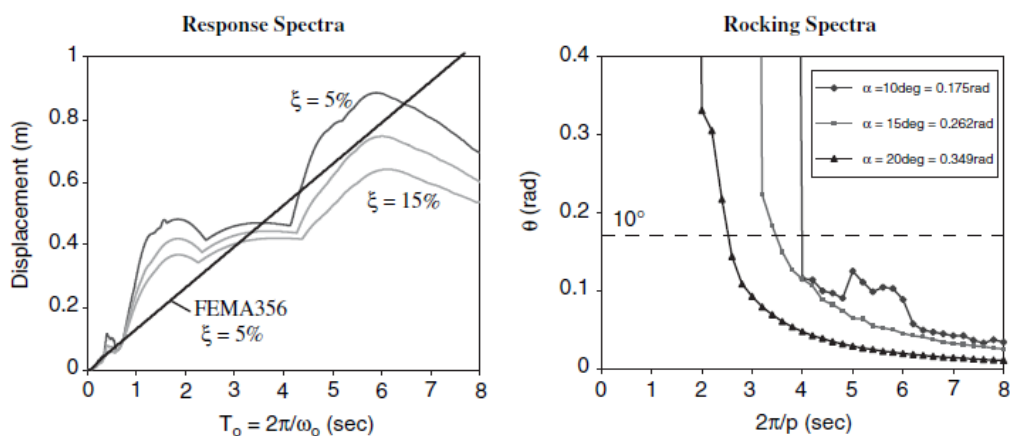


Fig. 43 - Spettri di risposta reali di un oscillatore lineare smorzato (a sinistra) e spettri di un blocco rigido oscillante (a destra) sottoposti al movimento della diga di Pacoima durante il terremoto di San Fernando del 1971 [31]

Per comprendere meglio le differenze tra i due modelli si osservi l'immagine proposta da Makris in [43]. La figura 44 mostra a sinistra il modello di deformazione di un telaio momento-resistente quando è soggetto ad un carico laterale capace di indurre lo snervamento dei giunti. L'immagine a destra illustra invece il modello di deformazione di un telaio *rocking*, composto da due colonne rigide autoportanti

sormontate da una trave rigida liberamente supportata, soggetto ad un carico laterale capace di indurre il sollevamento delle colonne.

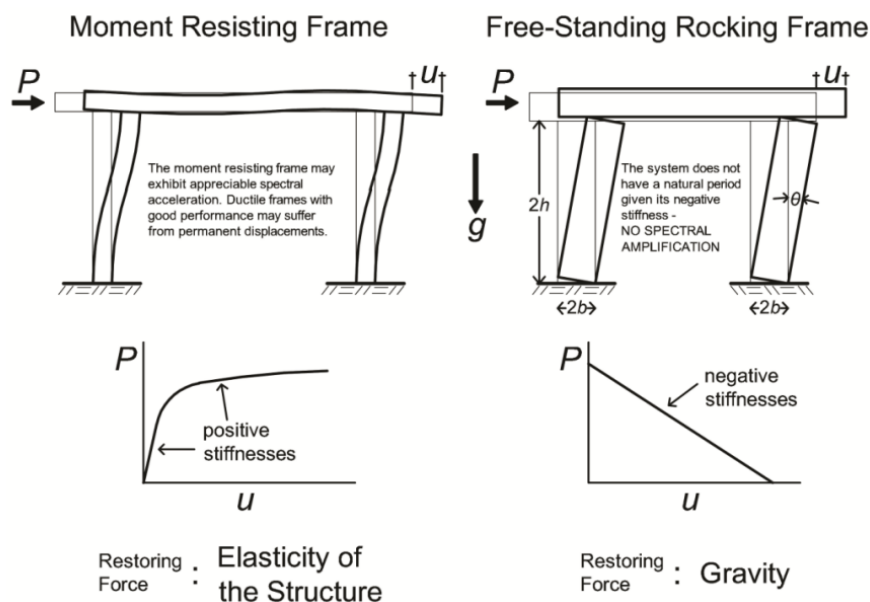


Fig. 44 - Differenza fondamentale nel comportamento di un tradizionale telaio momento-resistente (a sinistra) e un telaio oscillante con colonne libere che possono oscillare (a destra) [43]

La relazione forza-spostamento ($P-u$) del telaio *rocking* indica che il sistema articolato ha una rigidità infinita fino al raggiungimento del sollevamento e, una volta che il telaio a quattro cerniere è in oscillazione, la sua forza di ripristino diminuisce monotonamente, raggiungendo lo zero quando la rotazione della colonna $\theta = \alpha = \arctan(b/h)$. Si tratterà di un meccanismo a quattro cerniere che mostra una rigidezza laterale negativa.

La curva forza-deformazione ($P-u$) del primo telaio invece non è lineare e mostra una rigidezza positiva.

In sintesi le principali differenze tra i due sistemi SDOF, oscillatore semplice smorzato e blocco rigido oscillante, sono riassunte in Tab. 1 dove vengono messi a confronto i principali parametri che li definiscono:

Parametri/ Caratteristiche	Oscillatore smorzato m, c, k	Blocco rigido oscillante b, h, g
Meccanismo di ripristino	Elasticità della struttura	Gravità

<i>Forza/ momento di ripristino</i>	$F = ku$	$M = mgR \sin(\alpha - \vartheta)$ $R = \sqrt{b^2 + h^2}$
<i>Rigidezza in equilibrio stabile</i>	Finita	Infinita
<i>Forza/ momento di ripristino in equilibrio stabile</i>	Zero	Finita: $mgR \sin(\alpha)$
<i>Rigidezza lontano dalla condizione di equilibrio</i>	Positiva	Negativa
<i>Parametro di frequenza</i>	Frequenza naturale non smorzata: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Parametro di frequenza (per blocchi rettangolari): $p = \sqrt{\frac{3g}{4R}}$
<i>Parametro di smorzamento</i>	Coefficiente di smorzamento viscoso: $\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$	Snellezza: $\alpha = \tan^{-1}(b/h)$

Tab. 1 - Caratteristiche e parametri dei due sistemi a un grado di libertà [31]

Mentre la maggior parte degli ingegneri moderni sono portati a progettare strutture staticamente indeterminate che presentano rigidità positive e sufficiente duttilità; gli antichi costruttori progettavano sistemi strutturali diversi ovvero meccanismi articolati con rigidità negative e basso smorzamento.

Ciò che è notevole di queste strutture articolate è che hanno resistito alla prova del tempo sopravvivendo a forti movimenti sismici.

Le conclusioni che si possono trarre per lo studio del comportamento dinamico delle strutture *rocking* sono:

- L'ineguagliabile performance sismica delle strutture a blocchi è dovuta proprio al fatto che si tratta di meccanismi articolati.
- La loro inerzia rotazionale è sufficiente a resistere ai fenomeni sismici specie nel caso di strutture di grandi dimensioni (il parametro da valutare è $R = \sqrt{b^2 + h^2}$).
- Non è possibile valutare il fenomeno della risonanza in quanto tali strutture non hanno una frequenza naturale fissa e quindi non è possibile individuare il valore della frequenza che causa tale fenomeno.
- Il fenomeno dell'amplificazione del rocking è sensibile ad una serie di fattori: spaziatura, intensità e durata degli impulsi successivi.

- E' impossibile prevedere dunque l'esatta risposta di un blocco oscillante ad un possibile terremoto che è essenzialmente un insieme di impulsi consecutivi con caratteristiche estremamente diverse.
- Lo studio di queste strutture sottoposte ad impulsi sismici primari è fondamentale per prevedere efficacemente il collasso per oscillazione.

3.4 Archi in muratura soggetti a moti alla base

Il primo approccio razionale alla dinamica degli archi in muratura spetta ad Oppenheim [18] e consiste in una estensione al caso degli archi delle teorie di Housner.

Lo studio di Oppenheim ha come scopo l'analisi del comportamento dinamico di un arco rappresentato come un "four-link mechanism" ABCDA (Fig. 45). Viene così analizzato questo sistema ad un grado di libertà utilizzando come parametro lagrangiano la rotazione di uno dei link del sistema.

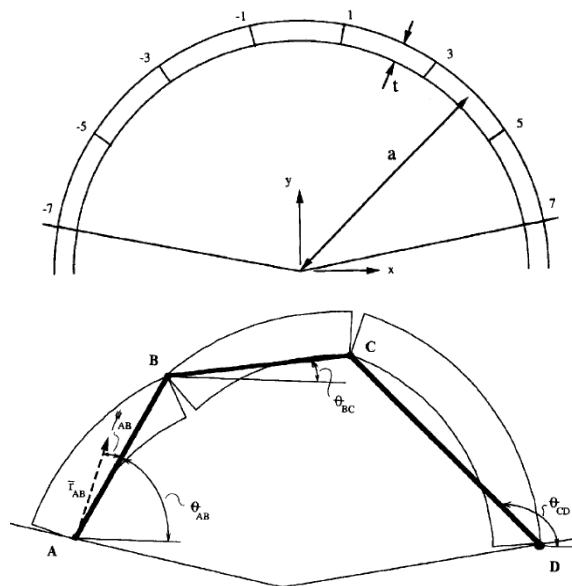


Fig. 45 - Geometria dell'arco e meccanismo di corpo rigido del four-link

Il modello di Oppenheim si basa sulle classiche ipotesi di Heyman relative alla risposta meccanica della muratura (§ 2.3.1). Secondo tali presupposti viene studiata la risposta dell'arco sotto un impulso rettangolare impresso alla base, discutendo

esplicitamente la dinamica del sistema. Utilizzando i principi di Hamilton e l'equazione di Lagrange si ricava l'espressione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = Q. \quad (3.17)$$

Esplicitando T energia cinetica del sistema, V energia potenziale e Q funzione di forze generalizzata si ottiene l'equazione del moto del sistema:

$$M(\vartheta)ma^3\ddot{\vartheta} + L(\vartheta)ma^2\dot{\vartheta}^2 + F(\vartheta)ma^2g = P(\vartheta)ma^2\ddot{x}_g, \quad (3.18)$$

dove m è la massa per unità di lunghezza, a è il raggio della superficie media (Fig. 45) e M, L, F, P sono coefficienti non lineari in ϑ .

Il risultato finale di questo studio si evince dal dominio di rottura (accelerazione al suolo-durata) riportato in figura 46.

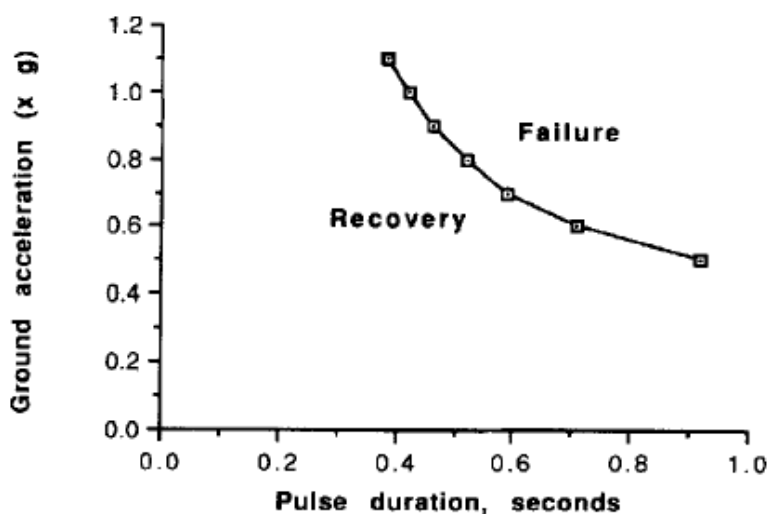


Fig. 46 - Dominio di rottura: accelerazione al suolo-durata [18]

In primo luogo da tale grafico si può determinare un valore di soglia dell'accelerazione alla base, al di sotto del quale l'arco si comporta come un corpo rigido e quindi è nella condizione di "recovery" rispetto ai carichi sismici. Questo valore di soglia corrisponde a quello che può essere determinato dall'Analisi Limite come carico orizzontale critico per l'arco, dipendente solo dalla geometria dello stesso.

Nel momento in cui l'eccitazione alla base supera la soglia di cui sopra si attiva un meccanismo con l'apertura di 4 cerniere in corrispondenza dei giunti.

È interessante sottolineare che la condizione di attivazione del meccanismo del *rocking arch* dipende dal rapporto spessore/raggio medio (t/a) e dall'angolo di apertura dell'arco (β). Inoltre, poiché le cerniere possono aprirsi solo in corrispondenza dei giunti, la stereotomia influenza sia i possibili meccanismi che il carico di collasso.

L'analisi dinamica eseguita mostra come, dopo l'attivazione del meccanismo di oscillazione, l'arco può crollare o meno durante il primo ciclo del moto a seconda della durata dell'impulso e del valore dell'accelerazione, come mostrato in figura 46.

Clemente [19] nel 1998 ha esteso l'analisi di Oppenheim considerando anche il caso degli impulsi sinusoidali ed evidenziando l'influenza della frequenza e delle condizioni iniziali sulla possibile rottura dell'arco. In particolare si osserva che, all'aumentare del periodo di eccitazione alla base, il collasso è guidato da una graduale diminuzione dell'accelerazione (Fig. 47).

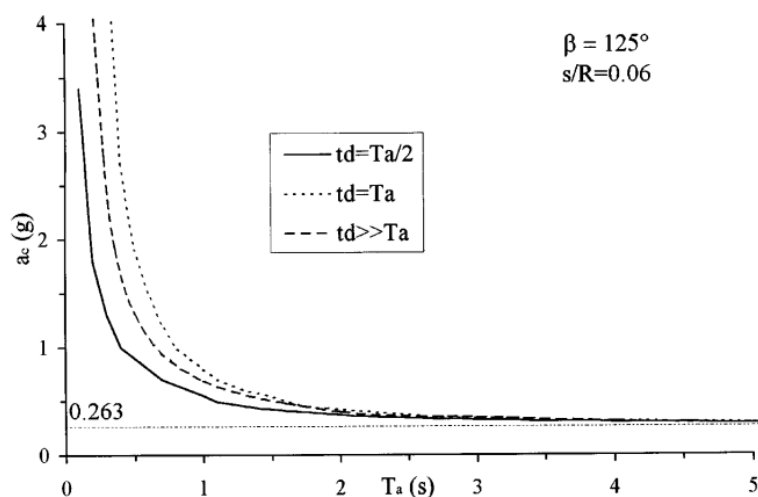


Fig. 47 - Influenza del periodo di un impulso sinusoidale sul crollo di un arco in muratura [19]

Un ulteriore contributo alla comprensione della dinamica degli archi in muratura è dovuto a De Lorenzis et al. [20]: il comportamento strutturale è studiato anche per cicli di moto successivi al primo modellando l'impatto tra i voussoir all'istante dell'inversione di moto. Questo permette di riconoscere che la posizione delle cerniere cambia quando, dopo il primo ciclo di moto, l'arco recupera la configurazione iniziale e inizia a muoversi nella direzione opposta (Fig. 48).

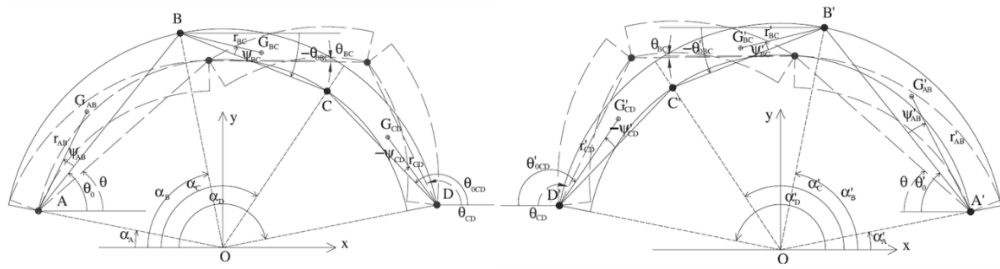


Fig. 48 - Movimento dell'arco in due cicli del moto con differente posizione delle cerniere [20]

L'arco è studiato sotto l'azione sia di impulsi rettangolari che sinusoidali. Analogamente agli studi precedenti, in [20] emerge che nessun meccanismo può essere attivato al di sotto di una certa soglia di accelerazione. Al di sopra di questa soglia, a seconda dell'ampiezza dell'accelerazione e della durata dell'impulso, si aprono tre possibili scenari (Fig. 49): il collasso può avvenire durante il primo ciclo (in tal caso la curva coincide con la Fig. 46); il collasso può avvenire durante il secondo ciclo; altrimenti, quando l'impulso cessa, l'arco ritorna stabile nella configurazione di riferimento. Va osservato che il collasso durante il secondo ciclo rappresenta una condizione sfavorevole, più pericolosa, poiché si attiva per accelerazioni molto inferiori a quelle che portano al collasso durante il primo ciclo.

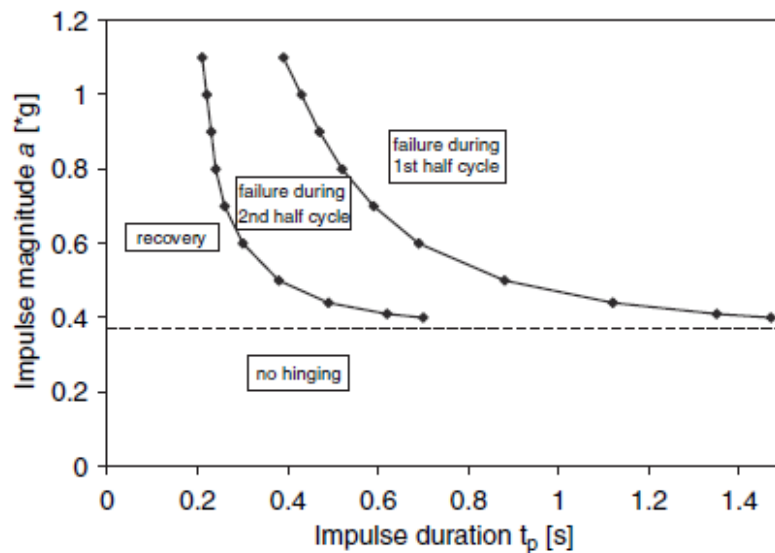


Fig. 49 - Movimento dell'arco in due cicli del moto con differente posizione delle cerniere [20]

3.5 Test dinamici su archi in muratura

I risultati teorici di cui sopra, anche se ottenuti con ipotesi semplificative, delineano già un comportamento dinamico piuttosto complesso degli archi in muratura. Naturalmente, il comportamento reale è influenzato da molteplici fattori che possono indurre una risposta ancora più complessa: la dissipazione durante gli impatti e l'arrotondamento delle superfici a contatto; gli slittamenti e gli urti; la variazione del rapporto tra forza assiale e forza di taglio durante il movimento, che modifica le condizioni di attivazione dello scorrimento tra i voussoir.

Quanto sopra motiva la necessità di analisi sperimentali, fondamentali per la validazione di modelli teorici e numerici.

Tuttavia, come si ricorda in § 1.1, in letteratura non si trovano sufficienti studi sperimentali sul comportamento dinamico degli archi in muratura, anche se si include il caso comparabile delle volte a botte.

3.5.1 Prove dinamiche su modelli in scala reale

Davvero pochi sono gli studi volti ad indagare il comportamento dinamico di modelli in scala reale di archi o volte. Molti degli esperimenti presenti in letteratura, infatti, tendono a soffermarsi sugli aspetti legati più alla formazione del meccanismo che alla comprensione del fenomeno in sé. Giamundo V. et al., in [44], presentano un esperimento in scala reale realizzato su un grande impianto sismico dell'Università di Napoli "Federico II" e riguardante una volta a botte in muratura realizzata in mattoni e sottoposta a diversi tipi di cronologie sismiche alla base (Fig. 50).

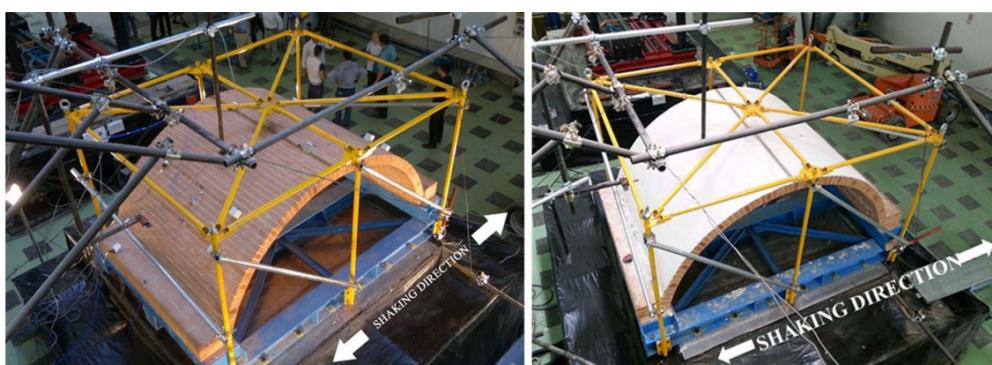


Fig. 50 - Configurazione del test con l'indicazione della direzione dell'azione sollecitante [44]

L'attenzione è focalizzata sui risultati di analisi modali e sull'amplificazione del moto sulla struttura, piuttosto che sull'aspetto oscillatorio della dinamica dopo l'apertura delle cerniere. Inoltre, viene analizzato anche il comportamento della volta sottoposta a tecniche di *retrofit*.

Altre ulteriori interessanti osservazioni sul comportamento sperimentale di archi in muratura sottoposti ad eccitazioni dinamiche sono riportate in [45], dove viene descritto un test su un arco in scala reale composto da blocchi di tufo (Fig. 51). In questo caso, la risposta della muratura è complicata anche dall'elevata deformabilità elastica del tufo; inoltre, la bassissima resistenza a trazione rende possibili fratture e lo schiacciamento locale dei blocchi, e questo evidentemente mina la validità delle ipotesi di Heyman.

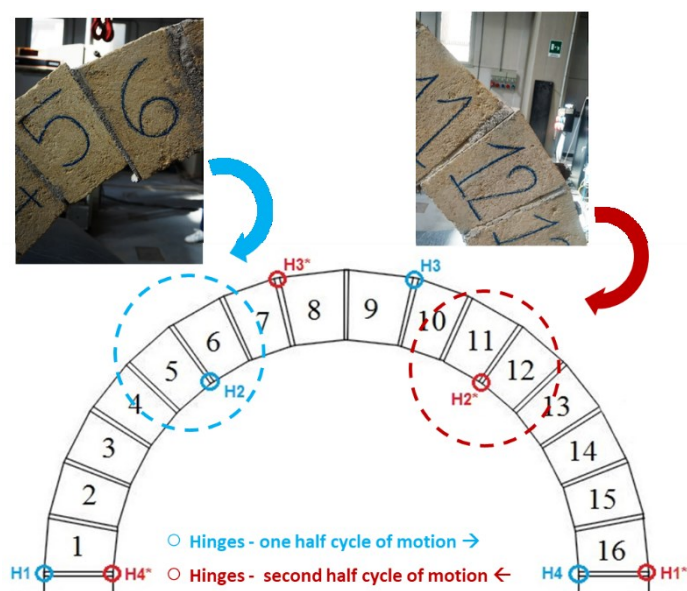


Fig. 51 - Schema della prova sperimentale, cerniere osservate [45]

In [45] l'arco viene sottoposto ad un moto armonico di base con un'ampiezza nominale fissa e una frequenza crescente da zero al collasso. La risposta è monitorata anche da accelerometri applicati sull'arco, al fine di valutare eventuali fenomeni di amplificazione rispetto al moto alla base.

Le combinazioni di accelerazione/frequenza delle eccitazioni di base impresse durante la prova sono tali che l'arco possa trovarsi in gran parte nel dominio di rottura determinato dai modelli teorici. Dunque, una volta superata la soglia di attivazione del meccanismo, l'arco oscilla agendo come un *rocking arch* senza collassare (Fig. 52).

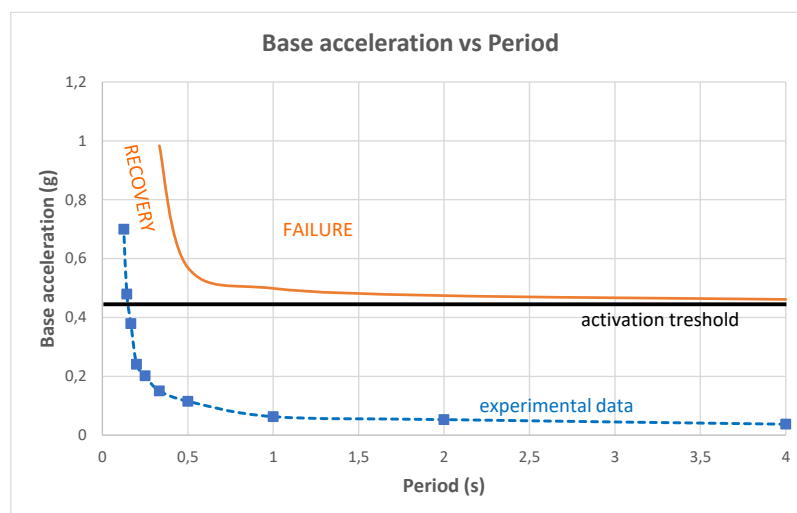


Fig. 52 - Dati teorici e sperimentali [45]

Per alcuni aspetti, l'esperimento in [45] si adatta alla teoria del *rocking arch*. Infatti, al di sotto della soglia di attivazione della figura 52, determinata dall'Analisi Limite, l'arco si comporta apparentemente come un corpo rigido, senza la comparsa di crepe visibili. Appena sopra la soglia, due gruppi di 4 cerniere si aprono attivando il meccanismo del *rocking arch*. Tuttavia aumentando leggermente l'accelerazione, in contrasto con la teoria, gli impatti tra le facce dei giunti aperti inducono evidenti fenomeni di scorrimento (Fig. 51), portando al collasso il sistema. Infine, si registra un fattore di amplificazione dinamica piuttosto complesso rispetto alla curva di frequenza, evidenziando effetti non trascurabili della deformabilità dell'arco.

I risultati di cui sopra aprono problemi sulla rappresentatività di questo tipo di esperimenti in scala reale per studiare l'effettivo comportamento dinamico degli archi in muratura.

3.5.2 Prove dinamiche su modelli in scala ridotta

Più numerosi sono invece gli esperimenti realizzati su modelli in scala ridotta.

De Jong et al. hanno esaminato in [21] il comportamento dinamico di due campioni di archi in muratura su piccola scala realizzati in calcestruzzo aerato autoclavato (Fig. 53) sottoposti a due tipi di eccitazioni alla base: le storie temporali dei terremoti applicate da uno shaker elettrodinamico, e i segnali continui pseudoarmonici a frequenza fissa e ampiezza crescente, generati da una tavola vibrante azionata da un attuatore servo-idraulico.

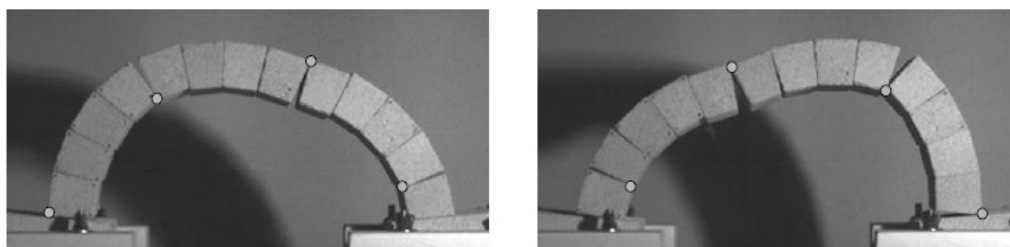


Fig. 53 - Rappresentazione della formazione di cerniere nei modelli di arco [21]

Questo studio è finalizzato al confronto con i risultati della teoria del *rocking arch* descritta nel § 3.2, e conferma i principali risultati della teoria come, ad esempio, la formazione di meccanismi a quattro cerniere alternate e la non ricorrenza della risonanza elastica. Il metodo dell'impulso primario è proposto per rappresentare i principali effetti delle eccitazioni dinamiche nei modelli teorici in quanto ritenuto di importanza critica per il collasso di archi in muratura.

Gli esperimenti condotti, confrontati con il modello analitico, hanno portato a dei risultati abbastanza soddisfacenti in termini di previsione del collasso.

Durante i test sperimentali tuttavia gli autori hanno evidenziato degli arrotondamenti degli spigoli e quindi una conseguente diminuzione dello spessore dei modelli. Sono stati quindi eseguiti dei tilting test che hanno evidenziato una riduzione dell'angolo critico di collasso λ_{exp} rispetto ai valori teorici λ_0 (Tab. 2) e quindi una conseguente variazione dell'accelerazione orizzontale limite. Quest'ultima dipende infatti da fattori geometrici, motivo per il quale gli stessi autori consigliano di considerare, per i modelli analitici di confronto, uno spessore ridotto del 20% al fine di prevedere le inevitabili imperfezioni ($\lambda_{0,80}$ in Tab. 2).

Specimen	Tilt Angle ^a , ϕ_{exp} (degrees)	λ_{exp} (Equation 3) (g)	λ_0 (100% thickness) (g)	$\lambda_{0,80}$ (80% thickness) (g)
Arch1	11.1±0.3	0.20±0.006	0.31	0.21
Arch2	17.5±0.3	0.31±0.004	0.41	0.30

^a Tilt angle represents the average and standard deviation of three tilt tests for each arch.

 Tab. 2 - Confronto tra i diversi valori di λ al variare dello spessore [21]

In [46] e [47] Gaetani et al. presentano esperimenti su tavola vibrante di archi composti da voussoir realizzati per la superficie esterna con tecnica di stampa 3D,

riempiti con inserti in legno e rivestiti con una miscela di sabbia fine e resina poliesteri bicomponente raggiungendo un angolo di attrito medio pari a $34,2^\circ$. Lo stesso trattamento è stato applicato anche ai supporti per mantenere un angolo di attrito costante. L'arco è stato sottoposto ad impulsi sinusoidali finestrati. In figura 54 vengono riportati i risultati sperimentali confrontati con quelli ottenuti dal modello teorico proposto da DeJong [21]: la curva ottenuta mostra un andamento più conservativo rispetto a quello teorico.

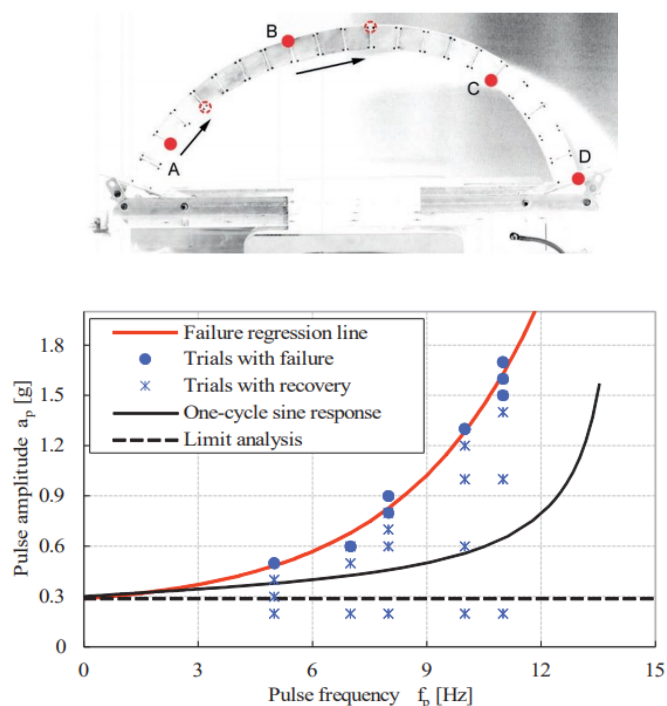


Fig. 54 – Posizione cerniere nel modello in scala e risultati dei test sulla tavola vibrante [47]

Il più recente lavoro di Alforno M. et al. [48] utilizza la sperimentazione su modelli di archi e volte per convalidare un metodo semplificato di micro-modellazione applicato alla simulazione numerica. I test sono condotti su arco semicircolare realizzato in blocchi di legno legati tra loro da malta. L'arco è montato su un telaio in cui uno dei due appoggi può scorrere attraverso la rotazione di una barra nervata. Si tratta quindi di una indagine cinematica che punta ad individuare il massimo valore di apertura degli appoggi che l'arco può raggiungere prima del collasso.

Per le prove condotte su volte in scala Alforno et al. realizzano una volta a crociera assemblando con giunti a secco blocchi realizzati con tecnica 3D. I test condotti prevedono apertura longitudinale con il movimento di due dei quattro appoggi, test di taglio semplice e prova di tilting.

Osservando i dati ottenuti della prova di tilting e confrontandoli con le analisi numeriche in figura 55 si vede come i risultati numerici sovrastimano l'effettiva capacità di collasso della struttura.

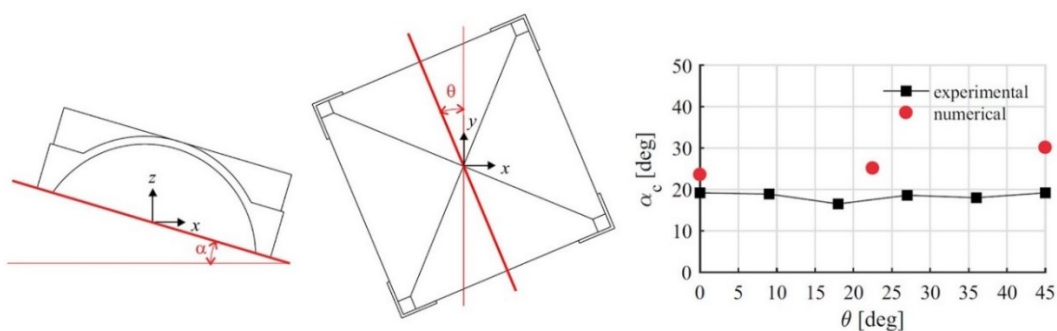


Fig. 55 - Confronto tra i risultati numerici e sperimentali condotti attraverso prove di tilting [48]

Un approccio differente per gli esperimenti dinamici su archi e volte di piccole dimensioni è stato discusso in [49] e [50] in cui vengono realizzati modelli continui e valutato l'effetto della resistenza a trazione del materiale.

Lo studio proposto da Albuérne et al. in [49] descrive infatti una serie di prove su tavola vibrante effettuate su archi circolari continui in scala di 1m di luce. Lo scopo è quello di valutare l'effetto della resistenza a trazione sulla formazione dei meccanismi, valutare la capacità orizzontale e confrontare il comportamento dell'arco continuo con quello di un arco a voissiors.

In questo caso l'influenza di una resistenza a trazione anche piccola della risposta dinamica non compromette la formazione di un meccanismo a quattro maglie (Fig. 56). Tuttavia il modello di arco continuo mostra notevoli differenze con gli archi a voissiors utilizzati negli altri studi: si evidenziano differenze nella posizione delle cerniere; accelerazioni più elevate richieste per dare avvio alle oscillazioni; fessurazione del materiale necessario per formare le cerniere ed incapacità delle cerniere, una volta formate, di chiudersi e migrare in una posizione diversa.

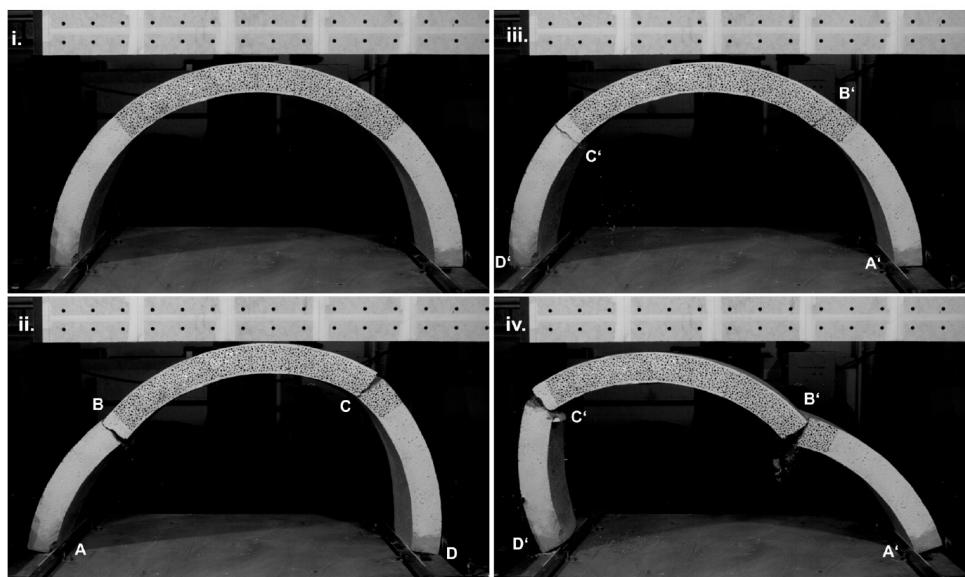


Fig. 56 - Test dinamici su un modello di arco circolare continuo [49].

Anche nel lavoro di Williams et al. [50] i test sperimentali effettuati su modelli in scala hanno previsto l'utilizzo di un materiale continuo. Il modello in scala di una volta a botte e di una volta a crociera (Fig. 57) sono stati infatti realizzati attraverso una gettata di materiale composto da gesso e sabbia in casseforme di legno.

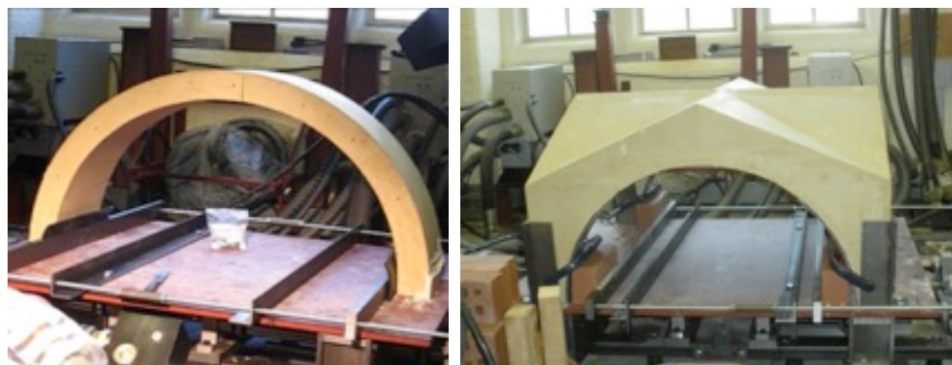


Fig. 57 - Modelli di volta a botte e a crociera realizzati con materiale continuo [50]

La scelta del materiale è legata alla necessità per gli autori di avvicinarsi il più possibile alle prestazioni tecniche del calcestruzzo romano, vale a dire una notevole resistenza alla compressione ed una limitata (ma non nulla) resistenza a trazione.

Le volte sono sottoposte ad un movimento unidirezionale della base attraverso una serie di impulsi sinusoidali di varia ampiezza e frequenza. Per ottenere maggiore

stabilità gli autori hanno aggiunto brevi cicli di “ramp-up” e “ramp-down” prima e dopo il ciclo principale così come mostrato in figura 58.

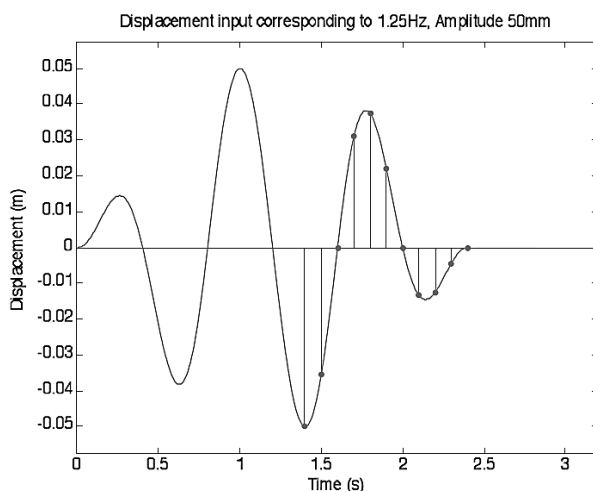


Fig. 58 - Impulso alla base [50]

Anche in questo caso, come in [49], i test mostrano significative differenze rispetto al comportamento di archi realizzati con voussoir specialmente nella posizione delle cerniere.

In conclusione gli esperimenti condotti su modelli in scala ridotta mostrano in generale dei limiti nei risultati ottenuti:

- Il lavoro di DeJong et al. [21] presenta dei difetti nella scelta del materiale e dell'assemblaggio dei conci: questo comporta scorrimento tra i conci ed un danneggiamento all'interfaccia che causa una variazione evidente nella risposta sismica (in termini di valore accelerazione di attivazione del meccanismo).
- Il lavoro di Gaetani et al. [46] mostra un approfondimento nella realizzazione del modello in scala che tuttavia mostra un comportamento dinamico distante da quello teorico proposto da DeJong
- I lavori di Williams et al. [50] ed Albuérne et al. [49] utilizzano modelli di archi e volte realizzati con materiale continuo considerando una resistenza a trazione non nulla del materiale: i risultati mostrano notevoli differenze con il modello a voussoir nella posizione delle cerniere, nel valore delle accelerazioni richieste per dare avvio alle oscillazioni e ovviamente nella impossibilità per le cerniere, una volta formate, di chiudersi e migrare in una posizione diversa.

Capitolo 4

UN NUOVO MODELLO PER TEST DINAMICI SU ARCHI IN SCALA

I risultati sperimentali delle prove dinamiche su archi in scala reale e in scala ridotta sintetizzate in § 3.5 hanno dunque sollevato una serie di perplessità legate ai limiti riscontrati sia nella concezione dei modelli che nei risultati raggiunti.

La prima considerazione nasce dal fatto che effettuare delle indagini sperimentali di tipo dinamico significa sottoporre i modelli ad un numero elevato di collassi. Questo è il principale motivo della mancanza di prove su modelli in scala reale. Pertanto per questi ultimi si punta più all'osservazione del meccanismo di attivazione e del carico limite ad esso associato che ad una vera e propria indagine sulla dinamica di tipo rocking.

I limiti che si possono riscontrare nei modelli in scala ridotta sono invece legati alla difficoltà nel riprodurre le condizioni presenti in una struttura reale: le forze di compressione interna, che ad esempio in una struttura esistente sono fortemente influenzate dal riempimento, in un modello in scala sono di gran lunga inferiori causando così fenomeni di scorrimento tra i blocchi.

Nel presente lavoro si presenta innanzitutto una formalizzazione matematica che intende esplicitare il modello analitico per lo studio della dinamica di archi in muratura. Da questo emerge come la dinamica sia strettamente legata agli aspetti geometrici del modello.

Si propone dunque un modello in scala ridotta realizzato con una tecnologia (materiali e sistema di interfaccia) in grado di riprodurre in ogni istante della prova le ipotesi alla base del modello di rocking (resistenza a compressione infinita, resistenza a trazione a nulla e assenza di scorrimento) senza evidenti danneggiamenti durante i numerosi collassi.

4.1 Esplicitazione del modello analitico per archi in muratura

Studiare la dinamica di un arco significa analizzare un sistema “multy-body” ovvero un sistema costituito dall'assemblaggio di corpi rigidi che hanno la possibilità di compiere movimenti relativi tra di loro. Si associa tale sistema allo schema del “four-bar mechanism”. Quest'ultimo, come mostrato in figura 59, consta di tre link mobili:

il link di “input” di lunghezza l_1 , il “coupler” link di lunghezza l_2 e il link di “output” di lunghezza l_3 . L’orientamento di questi tre elementi rispetto all’orizzontale è definito dagli angoli ϑ_1 , ϑ_2 e ϑ_3 . I baricentri G_i di ognuno dei 3 corpi sono inoltre situati ad una distanza r_i ($i = 1,2,3$) rispettivamente dai punti A, B e D .

I tre link sono infine collegati da un quarto elemento qui indicato con l_0 .

Verrà dunque studiato questo sistema ad un grado di libertà individuando come parametro lagrangiano la rotazione ϑ_1 del link di input l_1 .

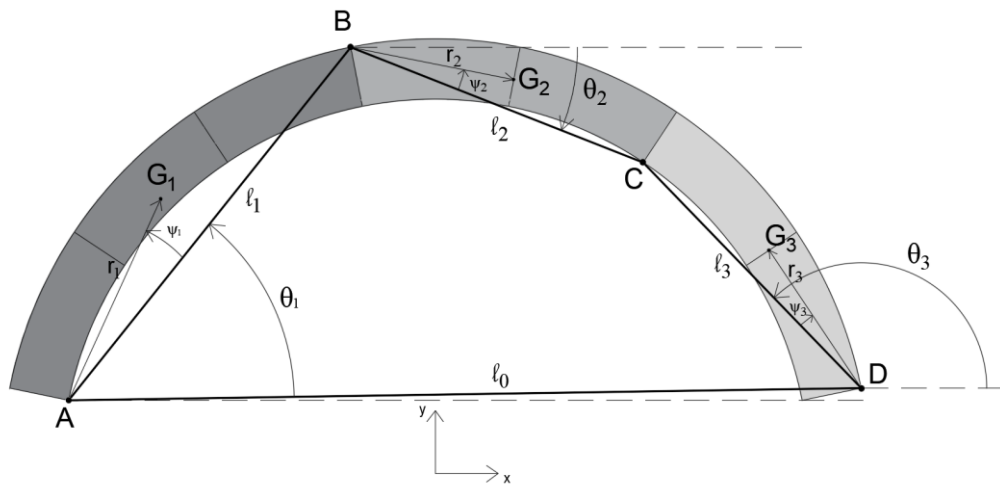


Fig. 59 - Rappresentazione del four-bar mechanism

Analisi algebrica di posizione

Il four-bar mechanism è un esempio di sistema chiuso ovvero “closed-chain system” [51].

Vettorialmente la condizione di “closed loop” per il sistema a quattro barre può essere così definita:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} = 0 \quad (4.1)$$

Questa equazione vettoriale è equivalente a due equazioni algebriche a cui corrispondono le componenti x e y dell'espressione precedente.

Per cui, assegnato $K_0 : \{K_{01}, K_{02}\}$, versore del link l_0 , le equazioni lungo x ed y si scriveranno rispettivamente come segue:

$$K_{01} \ell_0 - \ell_1 \cos \vartheta_1 - \ell_2 \cos \vartheta_2 + \ell_3 \cos \vartheta_3 = 0, \quad (4.2)$$

$$K_{02} \ell_0 - \ell_1 \sin \vartheta_1 - \ell_2 \sin \vartheta_2 + \ell_3 \sin \vartheta_3 = 0. \quad (4.3)$$

Da queste equazioni si ricavano le relazioni che permettono di esprimere ϑ_2 e ϑ_3 in funzione del parametro lagrangiano ϑ_1 :

$$\ell_2 \cos \vartheta_2 = \ell_0 - \ell_1 \cos \vartheta_1 + \ell_3 \cos \vartheta_3, \quad (4.4)$$

$$\ell_2 \sin \vartheta_2 = \ell_0 - \ell_1 \sin \vartheta_1 + \ell_3 \sin \vartheta_3, \quad (4.5)$$

$$\ell_3 \cos \vartheta_3 = -\ell_0 + \ell_1 \cos \vartheta_1 + \ell_2 \cos \vartheta_2, \quad (4.6)$$

$$\ell_3 \sin \vartheta_3 = -\ell_0 + \ell_1 \sin \vartheta_1 + \ell_2 \sin \vartheta_2, \quad (4.7)$$

Sostituendo le prime due equazioni nella relazione $\cos \vartheta_2^2 + \sin \vartheta_2^2 = 1$, e le ultime due in $\cos \vartheta_3^2 + \sin \vartheta_3^2 = 1$, si ottengono:

$$\begin{aligned} \ell_0^2 - \ell_1^2 + \ell_2^2 - \ell_3^2 + 2K_{01} \ell_0 \ell_1 \cos \vartheta_1 - 2K_{01} \ell_0 \ell_3 \cos \vartheta_3 \\ + 2\ell_1 \ell_3 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_3 + 2K_{02} \ell_0 \ell_1 \sin \vartheta_1 \\ - 2K_{02} \ell_0 \ell_3 \sin \vartheta_3 + 2\ell_1 \ell_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} -\ell_0^2 - \ell_1^2 - \ell_2^2 + \ell_3^2 + 2K_{01} \ell_0 \ell_1 \cos \vartheta_1 + 2K_{01} \ell_0 \ell_2 \cos \vartheta_2 \\ - 2\ell_1 \ell_2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + 2K_{02} \ell_0 \ell_1 \sin \vartheta_1 \\ + 2K_{02} \ell_0 \ell_2 \sin \vartheta_2 - 2\ell_1 \ell_2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Tali espressioni possono essere ricondotte all'equazione di Freudenstein con $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ed ε_3 funzioni di ϑ_1 :

$$\varepsilon_1(\vartheta_1) \sin \vartheta_3 + \varepsilon_2(\vartheta_1) \cos \vartheta_3 + \varepsilon_3(\vartheta_1) = 0, \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_1(\vartheta_1) \sin \vartheta_2 + \varepsilon_2(\vartheta_1) \cos \vartheta_2 + \varepsilon_3(\vartheta_1) = 0. \quad (4.11)$$

Di qui si ricavano le funzioni $\tilde{\vartheta}_3$ e $\tilde{\vartheta}_2$ che legano i due parametri ϑ_3 e ϑ_2 al parametro lagrangiano ϑ_1 :

$$\tilde{\vartheta}_3(\vartheta_1) = \pi + \arctan \frac{\varepsilon_1(\vartheta_1)}{\varepsilon_2(\vartheta_1)} - \arccos \frac{-\varepsilon_3(\vartheta_1)}{\sqrt{\varepsilon_1(\vartheta_1)^2 + \varepsilon_2(\vartheta_1)^2}}, \quad (4.12)$$

$$\tilde{\vartheta}_2(\vartheta_1) = \arctan \frac{\varepsilon_1(\vartheta_1)}{\varepsilon_2(\vartheta_1)} + \arccos \frac{-\varepsilon_3(\vartheta_1)}{\sqrt{\varepsilon_1(\vartheta_1)^2 + \varepsilon_2(\vartheta_1)^2}}. \quad (4.13)$$

Cinematica

Come precedentemente descritto il movimento dell'arco è legato a quello del suo corrispondente four-bar mechanism $ABCD$. I punti A, B, C e D corrispondono alla posizione delle cerniere che si individuano nell'arco durante il moto. Il movimento analizzato in questo sistema, che verrà definito "sistema pre-impatto", avviene in senso orario e porta alle rotazioni ϑ_1, ϑ_2 e ϑ_3 dei tre link che, come dedotto anche dalla analisi posizionale, non sono indipendenti. La configurazione di riferimento del sistema, nonché l'originaria geometria dell'arco, è definita come lo spostamento ϑ_0 . Si introduce quindi la variabile φ (Fig. 60) con cui esprimere la rotazione rispetto alla geometria originaria: $\varphi = \vartheta_0 - \vartheta(t)$.

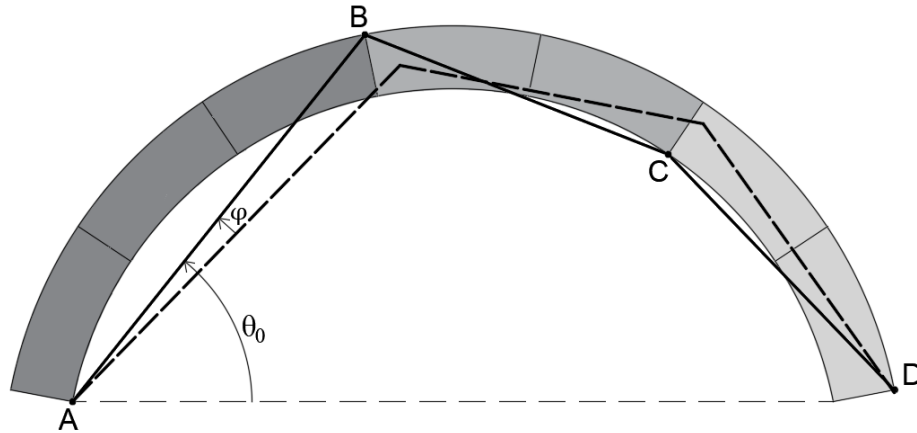


Fig. 60 - Four-bar mechanism in moto

Parametri del sistema

Per maggiore chiarezza si riportano di seguito (Tab.3) i principali parametri coinvolti nella descrizione del sistema piano schematizzato in figura 61.

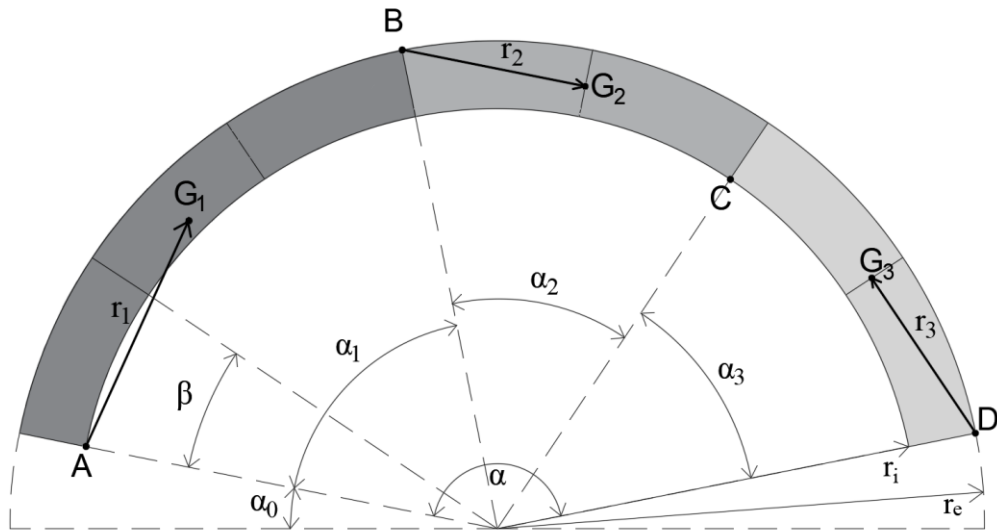


Fig. 61 - Schema del sistema piano

Si noti che l'arco analizzato è suddiviso in un numero di blocchi n_B tutti uguali tra di loro. Ad ognuno dei tre link corrisponderà poi uno specifico numero di blocchi n_{B_i} (con $i = 1,2,3$).

	Link 1	Link 2	Link 3
<i>Densità</i>	ρ		
<i>Profondità</i>	s		
<i>Spessore</i>	t		
<i>Volumi</i>	$V_1 = \frac{1}{2}s\alpha_1(r_e^2 - r_i^2)$	$V_2 = \frac{1}{2}s\alpha_2(r_e^2 - r_i^2)$	$V_3 = \frac{1}{2}s\alpha_3(r_e^2 - r_i^2)$
<i>Massa</i>	$m_1 = \rho V_1$	$m_2 = \rho V_2$	$m_3 = \rho V_3$
	$\vartheta_i = (\alpha_0 + \alpha) - n_{B_1}\beta$ $\vartheta_f = \alpha_0 + \alpha$	$\vartheta_i = (\alpha_0 + \alpha) - (n_{B_1} + n_{B_2})\beta$ $\vartheta_f = (\alpha_0 + \alpha) - n_{B_1}\beta$	$\vartheta_i = \alpha_0$ $\vartheta_f = (\alpha_0 + \alpha) - (n_{B_1} + n_{B_2})\beta$
<i>Momenti statici</i>	$S_x = \int_{\vartheta_i}^{\vartheta_f} \int_{r_i}^{r_e} r^2 \sin\vartheta \, dr d\vartheta$ $S_y = \int_{\vartheta_i}^{\vartheta_f} \int_{r_i}^{r_e} r^2 \cos\vartheta \, dr d\vartheta$		
<i>Area</i>	$A = \int_{\vartheta_i}^{\vartheta_f} \int_{r_i}^{r_e} r \, dr d\vartheta$		
<i>Baricentri</i>	$G_1: \left(\frac{S_y}{A}; \frac{S_x}{A}\right)$	$G_2: \left(\frac{S_y}{A}; \frac{S_x}{A}\right)$	$G_3: \left(\frac{S_y}{A}; \frac{S_x}{A}\right)$
<i>Inerzia baricentrica</i>	$I_1 = \rho s t \int_{r_i}^{r_e} r^3 \, dr - m_1 \ \mathbf{O} - G_1\ ^2$	$I_2 = \rho s t \int_{r_i}^{r_e} r^3 \, dr - m_2 \ \mathbf{O} - G_2\ ^2$	$I_3 = \rho s t \int_{r_i}^{r_e} r^3 \, dr - m_3 \ \mathbf{O} - G_3\ ^2$

Tab. 3 - Principali parametri del sistema piano

Analisi dinamica

L'equazione del moto per questo sistema ad un grado di libertà può essere ottenuta utilizzando una formulazione Lagrangiana. Sia T_i l'energia cinetica del sistema pre-impatto, V_i l'energia potenziale e Q_i la funzione di forze esterne generalizzata associata a forze non conservative, l'equazione di Lagrange si scriverà:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{\vartheta}(t)} \right) - \frac{\partial L_i}{\partial \vartheta(t)} = Q_i \quad (4.14)$$

dove $L_i = T_i - V_i$ è la funzione Lagrangiana.

L'energia potenziale V_i del sistema pre-impatto sarà così descritta:

$$V_i = g\{m_1 r_1 \sin(\vartheta_1(\vartheta(t)) + \psi_2) + m_2 [l_1 \sin(\vartheta_1(\vartheta(t)) + r_2 \sin(\vartheta_2(\vartheta(t)) + \psi_2)] + m_3 [y_D + r_3 \sin(\vartheta_3(\vartheta(t)) + \psi_3)]\}. \quad (4.15)$$

Si ricordi che ϑ_2 e ψ_3 (Fig.18) hanno valori negativi per la convenzione di segno positivo antiorario.

L'energia cinetica T_i del sistema pre-impatto sarà data dalla seguente espressione:

$$T_i = \frac{1}{2} m_1 \|v_1\|^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\vartheta}_1(\vartheta(t))^2 + \frac{1}{2} m_2 \|v_2\|^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\vartheta}_2(\vartheta(t))^2 + \frac{1}{2} m_3 \|v_3\|^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\vartheta}_3(\vartheta(t))^2, \quad (4.16)$$

dove le velocità dei tre elementi v_1, v_2 e v_3 sono:

$$\|v_1\|^2 = r_1^2 \dot{\vartheta}_1(\vartheta(t))^2, \quad (4.17)$$

$$\|v_2\|^2 = \frac{d}{dt} \left(l_1 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1(\vartheta(t)) \\ \sin \vartheta_1(\vartheta(t)) \end{Bmatrix} + r_2 \begin{Bmatrix} \cos(\vartheta_2(\vartheta(t)) + \psi_2) \\ \sin(\vartheta_2(\vartheta(t)) + \psi_2) \end{Bmatrix} \right)^2, \quad (4.18)$$

$$\|v_3\|^2 = r_3^2 \dot{\vartheta}_3(\vartheta(t))^2. \quad (4.19)$$

Il sistema di forze esterne Q_i in questo caso è dovuto all'accelerazione al suolo indicata con \ddot{x}_g la quale produce una forza effettiva di $-m\ddot{x}_g$ nella direzione x di ogni punto della struttura. Si scriverà pertanto:

$$Q_i = -\frac{d}{d\vartheta(t)} \{m_1 r_1 \cos(\vartheta_1(\vartheta(t)) + \psi_1) + m_2 [l_1 \cos \vartheta_1(\vartheta(t)) + r_2 \cos(\vartheta_2(\vartheta(t)) + \psi_2)] + m_3 [x_D + r_3 \cos(\vartheta_3(\vartheta(t)) + \psi_3)]\} \ddot{x}_g. \quad (4.20)$$

La risoluzione di V_i, T_i e Q_i avverrà considerando le relazioni precedentemente individuate dall'analisi posizionale: $\vartheta_1 \rightarrow \tilde{\vartheta}_1, \vartheta_2 \rightarrow \tilde{\vartheta}_2, \vartheta_3 \rightarrow \tilde{\vartheta}_3$.

L'equazione del moto del sistema pre-impatto si scriverà:

$$M(\vartheta(t)) R_m \ddot{\vartheta}(t) + L(\vartheta(t)) R_m \dot{\vartheta}(t)^2 + F(\vartheta(t)) = P(\vartheta(t)) \ddot{x}_g \quad (4.21)$$

dove M, L, F e P sono coefficienti non lineari in $\vartheta(t)$.

Il coefficiente M può essere interpretato come una inerzia generalizzata e in quanto tale è non lineare perché varia al variare della geometria del meccanismo. L include gli effetti dell'accelerazione centrifuga e di Coriolis e cattura i contributi della forza generalizzata risultante dal cambio di geometria del meccanismo. Il coefficiente formato da F è legato invece all'energia potenziale e rappresenta le forze gravitazionali generalizzate che la struttura sperimenta ad ogni stato di spostamento. Infine il coefficiente P corrisponde alla funzione di forze generalizzata Q .

Dall'equazione emerge come il sistema dipenda dalle dimensioni (in particolare dal raggio medio R_m) e non dalla massa.

La soluzione del sistema pre-impatto viene individuata imponendo le condizioni al contorno $\vartheta(0) = 0$ e $\dot{\vartheta}(0) = 0$.

Qui di seguito sono riportati i risultati in termini di φ (rotazione relativa) e tempo (Fig. 63) relativi ad un arco di $R_m = 10m$, $\alpha = 157.5^\circ$ e $t = 1.5m$, ottenuti per tre diversi impulsi a scalini (Fig. 62):

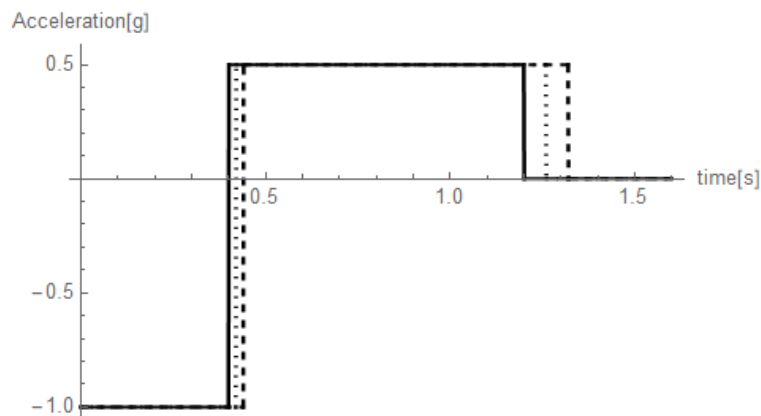


Fig. 62 - Impulsi di durata $t_p = 0.4s$ (continuo), $t_p = 0.42s$ (puntinato) e $t_p = 0.44s$ (tratteggiato)

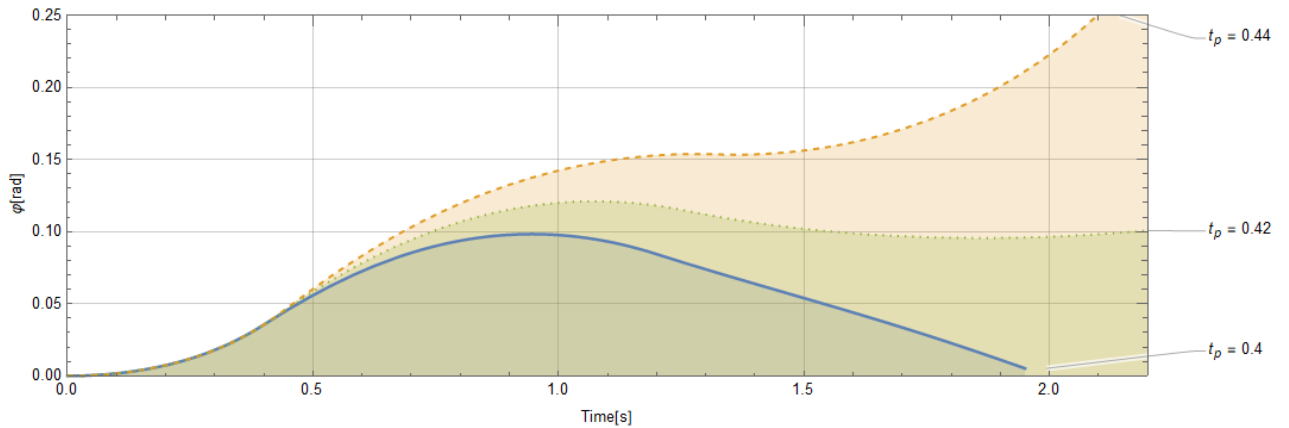


Fig. 63 - Diagramma φ [rad]-tempo[s] per $t_p = 0.4s$; $t_p = 0.42s$ e $t_p = 0.44s$

La figura 63 mostra come sia sufficiente una minima variazione di t_p pari a $0.02 s$ per condurre l'arco al collasso nel primo ciclo, prima che i blocchi impattino tra di loro.

L'impatto a questo punto porterà ad una riduzione della velocità e ad una nuova configurazione del sistema con cerniere disposte simmetricamente rispetto configurazione pre-impatto.

A questo punto il "sistema post-impatto" verrà studiato considerando il seguente schema:

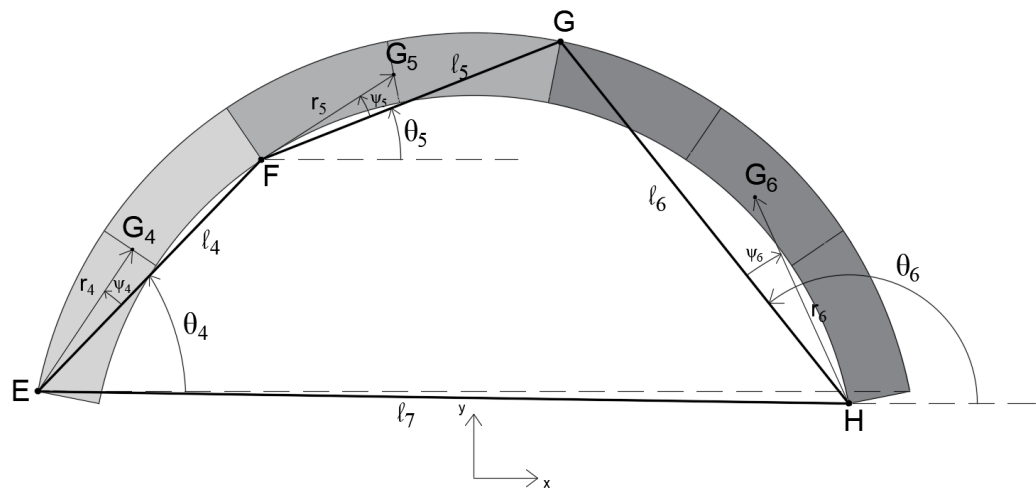


Fig. 64 - Schema del sistema post-impatto

Dalla figura 64 emerge come in fase post-impatto si vada incontro ad una migrazione delle cerniere con un nuovo sistema four-link $EFGH$.

Per quanto riguarda l'analisi posizionale e la cinematica valgono le stesse considerazioni fatte per il sistema pre-impatto considerando che anche in questo caso la rotazione positiva è quella in senso antiorario e che l'unico valore negativo è costituito da ψ_6 .

Questo nuovo sistema ad un grado di libertà viene studiato assumendo come parametro lagrangiano ϑ_4 .

L'equazione del moto per il sistema post-impatto assume la forma:

$$M(\vartheta(t)) R_m \ddot{\vartheta}(t) + L(\vartheta(t)) R_m \dot{\vartheta}(t)^2 + F(\vartheta(t)) = -P(\vartheta(t)) \ddot{x}_g . \quad (4.22)$$

4.2 Progettazione del nuovo sistema di interfaccia

L'aspetto chiave del design del meta-modello proposto è quello di non puntare sull'attrito per simulare la condizione di assenza di scorrimento tra i blocchi ma di individuare un nuovo sistema di interfaccia.

Infatti, riprodurre le condizioni reali di attrito è pressoché impossibile: anche se si conoscessero tutte le caratteristiche meccaniche dei materiali e dell'interfaccia di un arco reale, bisognerebbe scalare queste proprietà in maniera adeguata ed individuare un materiale che riesca a rappresentarle per riprodurne gli effetti nelle prove di laboratorio.

Questo nuovo sistema, quindi, non utilizza nessun materiale di interfaccia e, senza creare nessun meccanismo di incastro tra i blocchi, garantisce le ipotesi di resistenza a trazione nulla e di no-sliding.

Considerando due blocchi giustapposti, il sistema è composto da un piolo, la cui stereotomia verrà descritta successivamente, realizzato sulla superficie di contatto di un blocco; un foro dalla stereotomia complementare sulla faccia corrispondente del blocco adiacente e, infine, prevede una particolare modellazione delle linee di cerniera.

Questa ultima componente è stata introdotta in seguito a considerazioni fatte dopo le prime prove sperimentali (descritte in § 5). Da queste prove si è evinto che l'incernieramento lungo due superfici a spigolo vivo può alterare il comportamento teorico dell'arco per determinati valori di frequenze dell'impulso.

4.3 Stereotomia del sistema di interfaccia

Assegnato un arco suddiviso in n voussoir tutti uguali tra di loro, si definiscono le principali caratteristiche geometriche: raggio medio a , spessore t_A e angolo di embrace β .

Per il dimensionamento del piolo che costituisce il sistema di interfaccia si parte dallo studio della dinamica degli archi come illustrato nel § 3.4. Tramite l'equazione (4.15) è possibile ottenere l'andamento dell'energia potenziale del sistema "four-link" come mostrato in figura 65. Il valore massimo di questa energia potenziale corrisponde ad un angolo critico ϕ_{lim} in corrispondenza del quale si verifica la rotazione dei blocchi che porta al collasso del sistema.

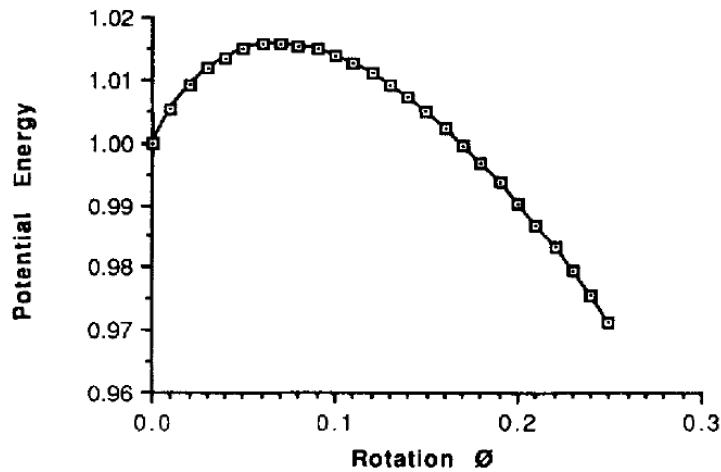


Fig. 65 - Andamento dell'energia potenziale dell'arco analizzato da Oppenheim in [18]

Individuato quindi l'angolo critico di collasso ϕ_{lim} del sistema, se ne studia il cinematismo ricavando il corrispondente angolo limite di rotazione relativo φ_{lim} tra le facce dei blocchi (vedi Fig. 66).

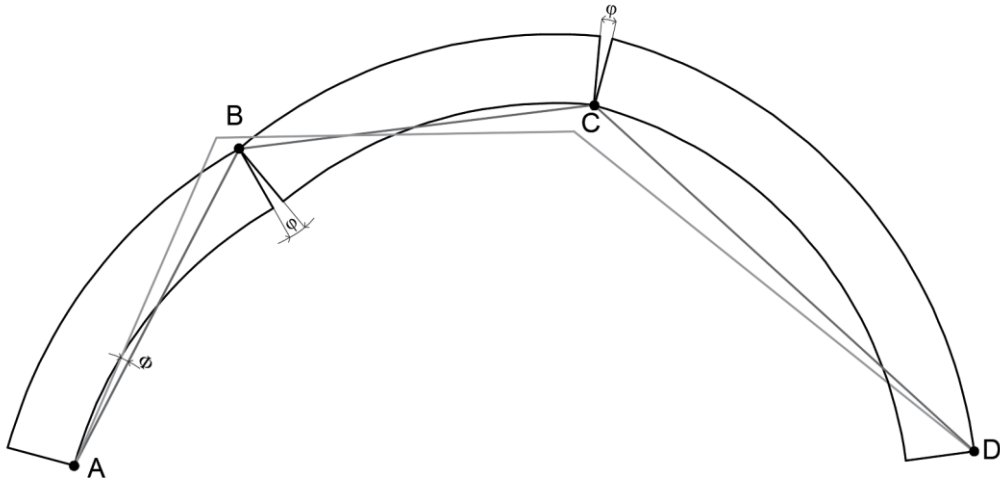


Fig. 66 - Soluzione cinematica per un angolo ϕ_{lim}

Definito il valore di ϕ_{lim} e il conseguente valore di φ_{lim} , è possibile identificare le caratteristiche geometriche del piolo; in particolare la lunghezza del piolo h sarà ottenuta dalla seguente relazione:

$$h = \varphi_{lim} \left(\frac{t_A}{2} \right). \quad (4.23)$$

Il piolo viene dunque sagomato sulla base del movimento di rotazione che due blocchi giustapposti dell'arco compiono intorno ai punti di cerniera O' ed O'' . La rotazione, come mostrato in Fig. 67, avviene con un raggio $r' = r'' = (t_A/2) + (h/2)$ e consente di ottenere la larghezza del piolo all'estremità denominata b .

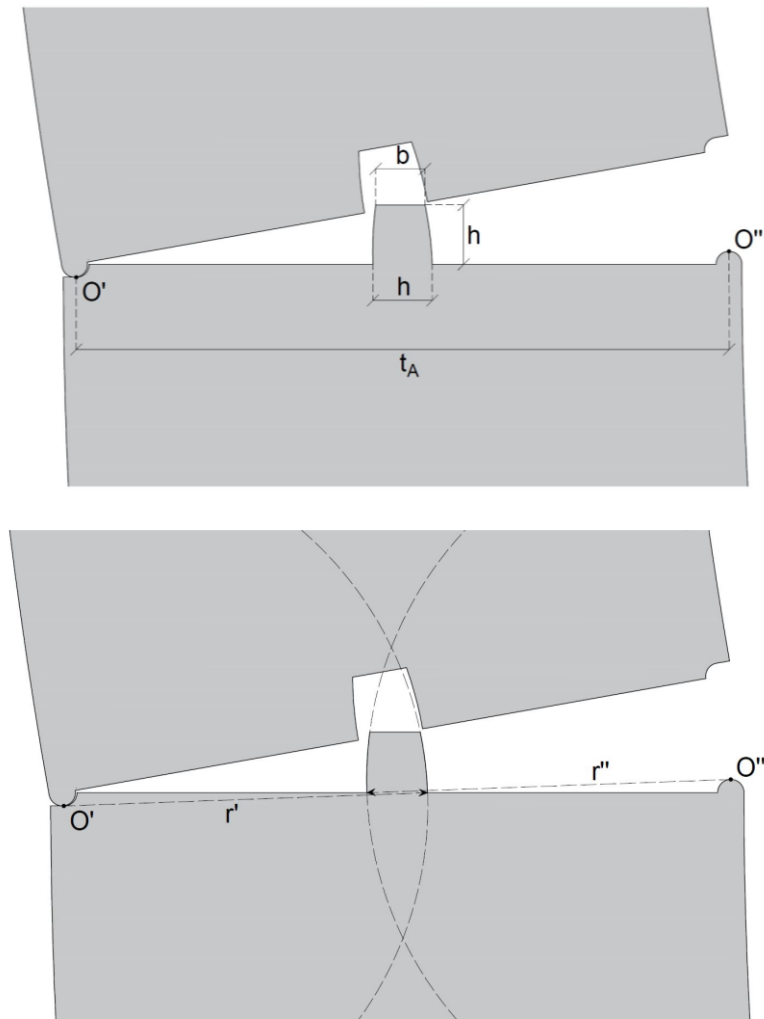


Fig. 67 - Dettaglio del dimensionamento del sistema di interfaccia

Il foro nella faccia corrispondente del blocco adiacente presenta la stessa stereotomia, ma viene realizzato considerando una tolleranza di circa 1mm. Il valore della tolleranza assunta dipenderà dalla precisione del sistema di stampa 3D che si utilizza, ed in generale è tale da evitare qualunque meccanismo di incastro.

Il sistema di interfaccia così descritto consente le rotazioni relative tra i blocchi intorno ai punti di cerniera evitando fenomeni di scorrimento prima del raggiungimento dell'angolo di collasso φ_{lim} (Fig. 68c). Di seguito una sequenza dei movimenti di rotazione tra due blocchi giustapposti al variare del generico angolo di rotazione relativo φ :

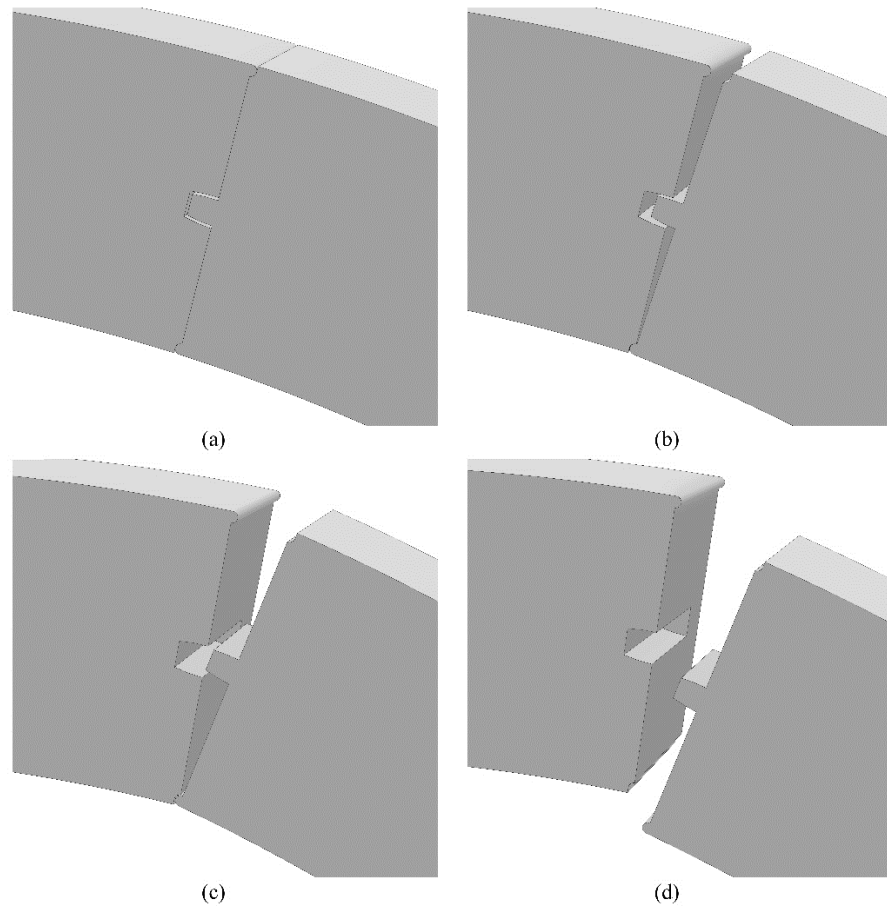


Fig. 68 - Dettaglio di una vista assonometrica della sezione di due blocchi durante il cinematismo: (a) $\varphi = 0$; (b) $\varphi < \varphi_{lim}$; (c) $\varphi = \varphi_{lim}$; (d) $\varphi > \varphi_{lim}$.

4.3.1 Progettazione dei punti di incernieramento

Il primo sistema realizzato e testato in laboratorio non prevedeva l'utilizzo della particolare modellazione degli spigoli lungo i quali avviene l'incernieramento. Questi ultimi, essendo a spigolo vivo, creavano problemi dovuti ad instabilità locali al diminuire delle frequenze dell'impulso.

Si è scelto quindi di ovviare a questo problema modellando gli spigoli dove avviene l'incernieramento come mostrato in Fig. 68. In questo modo vengono accomodati i movimenti di rotazione dei blocchi generando, lungo queste linee, forze di attrito comunque trascurabili rispetto alle forze in gioco. Considerando dunque il primo di due blocchi giustapposti, esso presenta, sulle linee di cerniera (estradosso ed intradosso dell'arco), un profilo semicilindrico. In corrispondenza di questo, sulla linea di cerniera corrispondente si presenta un profilo a quarto di cilindro con curvatura complementare.

Riguardo le dimensioni di queste linee di cerniera, si raccomanda di ridurre il più possibile il raggio con la prescrizione di basarsi comunque sulla qualità e precisione del sistema di stampa 3D utilizzato. Si noti che t_A va misurato rispetto ai punti O' ed O'' (Fig. 67) lungo i quali avviene l'incernieramento.

Capitolo 5

APPLICAZIONI E PROVE SPERIMENTALI

Nel precedente capitolo è stato presentato un nuovo modello per test dinamici su archi in scala, approfondendo in particolare la progettazione della stereotomia del sistema di interfaccia.

In questa sezione vengono illustrate le applicazioni dei concetti teorici precedentemente esposti per la definizione di due modelli, “modello A” e “modello B”, per ognuno dei quali vengono esplicitate le differenze geometriche e tecnologiche.

Vengono dunque illustrati i principi fondamentali per la determinazione del fattore di scala con cui analizzare i segnali per le prove dinamiche.

Viene infine descritto il setup sperimentale specificatamente configurato per i test dinamici dei modelli in scala realizzati.

I risultati delle prove condotte, insieme ai dati provenienti da prove di tilting, permettono di costruire curve di collasso per i due modelli.

5.1 Modelli di archi in scala ridotta

Per lo svolgimento delle prove sperimentali gioca un ruolo fondamentale la geometria poiché influenza fortemente la resistenza ed il comportamento dinamico di un arco in muratura e conseguentemente anche la dinamica di un modello di arco. In particolare così come definito da [18] i parametri che governano il comportamento dinamico di un arco sono il rapporto t_A/a (con t_A spessore dell’arco e a raggio medio) e l’angolo di embrace β .

Inoltre anche la stereotomia e il numero specifico di blocchi n sono rilevanti in quanto influenzano i possibili meccanismi dell’arco.

Sono stati realizzati due modelli di arco, *modello A* e *modello B*, con la stessa tecnologia ovvero stampa 3D (stampante Creality 3D Ender-3 pro) ma differenti per alcune caratteristiche geometriche e per la scelta dei materiali di riempimento.

Sono state, infatti, individuate due diverse tecnologie di riempimento che rendono però entrambi i modelli sufficientemente resistenti agli urti.

Nella scelta dei valori dei parametri geometrici per i due modelli, si è tenuto conto del minimo valore di spessore richiesto per la stabilità di un arco con uno specifico angolo di “embrace”. In particolare, osservando il diagramma (Fig. 69) riportato da

Heyman in [9] risulta evidente che, per un arco di 180° , il valore minimo richiesto per il rapporto t/R sia di circa 0,10 per cui nella progettazione dei modelli si terrà conto di questo aspetto.

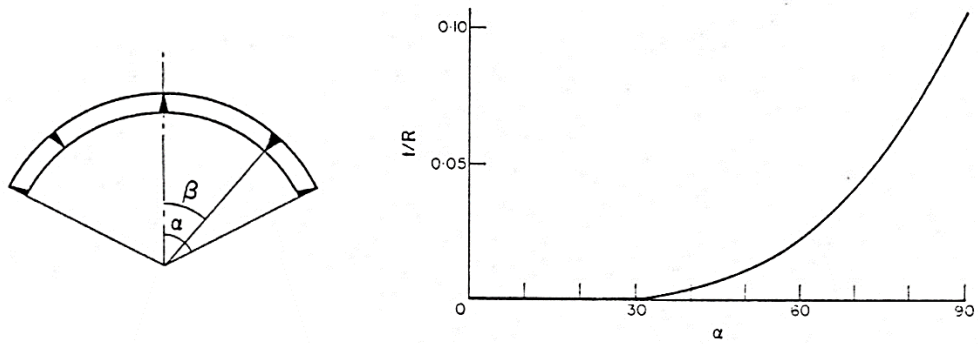


Fig. 69 - Arco circolare incompleto e diagramma del minimo spessore [9].

Modello A

Come illustrato in [52] il primo modello, schematizzato in figura 70, utilizza il sistema di interfaccia caratterizzato dal solo piolo.

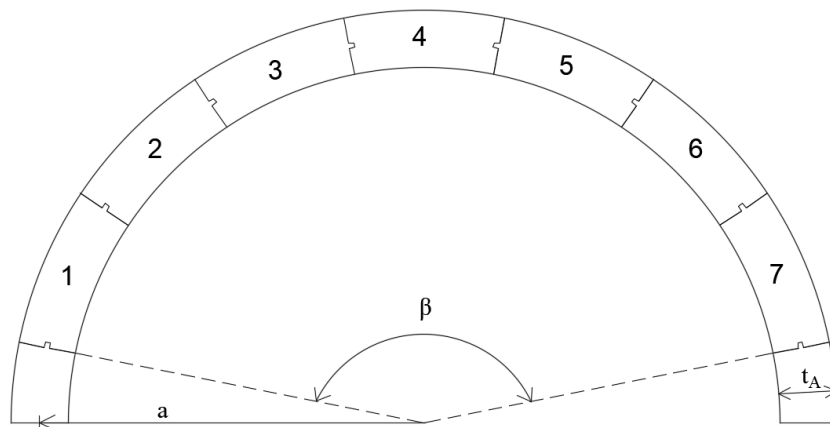


Fig. 70 - Sezione schematica del modello A

I parametri che caratterizzano la geometria di questo modello di arco sono: raggio medio $a = 0.35 \text{ m}$, spessore $t_A = 0.0525 \text{ m}$, rapporto $t_A / a = 0.15$, angolo di embrace $\beta = 157.5^\circ$, profondità $d_A = 0.07 \text{ m}$ e numero di blocchi $n = 7$.

Una volta definiti questi dati, richiamando le considerazioni sulla modellazione del sistema a piolo, riportate nel § 4.3, si studia l'energia potenziale (Fig. 71) di questo sistema al fine di valutare il valore critico ϕ_{lim} .

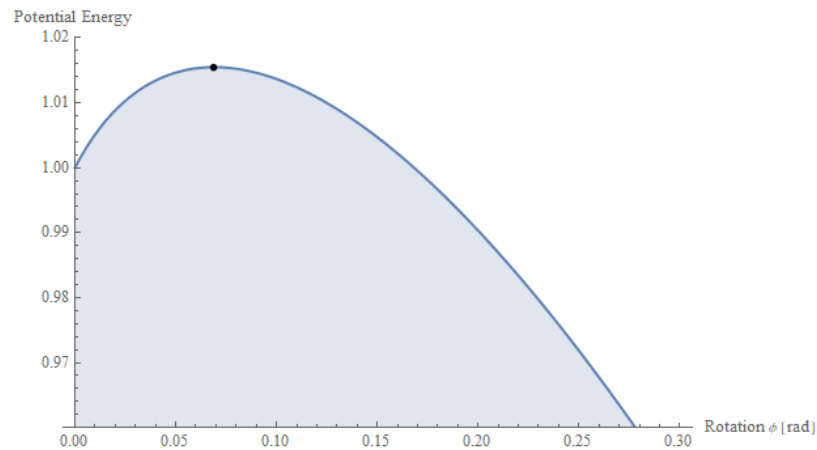


Fig. 71 - Andamento dell'energia potenziale per un arco con $\beta = 157.5^\circ$ e $t_A/a = 0.15$.

Per il *modello A*, si ricava $\phi_{lim} = 0.069 \text{ rad}$ e, dallo studio del cinematicismo, si ottiene il valore limite di apertura delle cerniere $\varphi_{lim} \cong 0.175 \text{ rad}$.

Nella progettazione del modello di arco non bisogna tuttavia trascurare la presenza dei due vincoli alla base: due conchi che lo ancorano al supporto necessario per lo svolgimento delle prove sperimentali. I due conchi alla base, infatti, presentano anch'essi un sistema di interfaccia il cui dimensionamento è legato ad un diverso valore dell'angolo di rotazione (φ_c) rispetto alle altre interfacce dovuto al fatto che la rotazione avviene tra un blocco vincolato ed uno con possibilità di rotazione (Fig. 72).

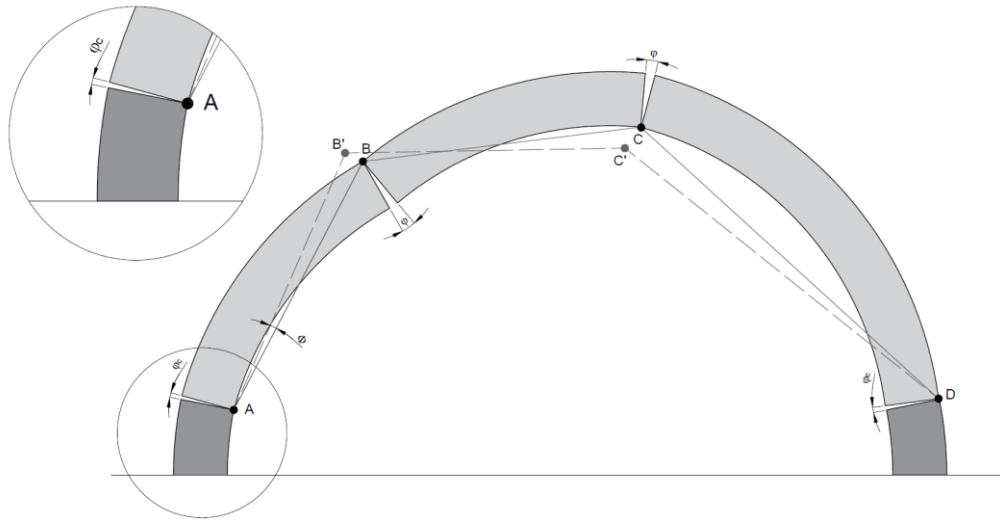


Fig. 72 - Cinematismo dell'arco e individuazione dell'angolo di rotazione alla base φ_c .

Il valore limite di quest'ultimo, $\varphi_{c\lim}$, sarà $0,067 \text{ rad}$. A questo punto è possibile identificare gli elementi geometrici caratterizzanti il sistema di interfaccia che saranno i seguenti: $h = 0.0046 \text{ m}$ calcolato per $\varphi_{lim} = 0.175 \text{ rad}$ e $h_c = 0.0046 \text{ m}$ calcolato per $\varphi_{c\lim} = 0,067 \text{ rad}$ relativo ai blocchi alla base.

Definite le dimensioni dei blocchi, si procede con la fase di realizzazione degli stessi tramite stampa 3D. Al fine di ridurne i tempi si è deciso di stampare la sola cassaforma dei blocchi per poi procedere al riempimento degli stessi.

Tale cassaforma, realizzata con filamenti plastici di PLA (acido polilattico) dallo spessore nominale di 1.2 mm , presenta al suo interno un elemento di collegamento tra intradosso ed estradosso per evitare possibili deformazioni della cassaforma una volta riempita (Fig. 73).

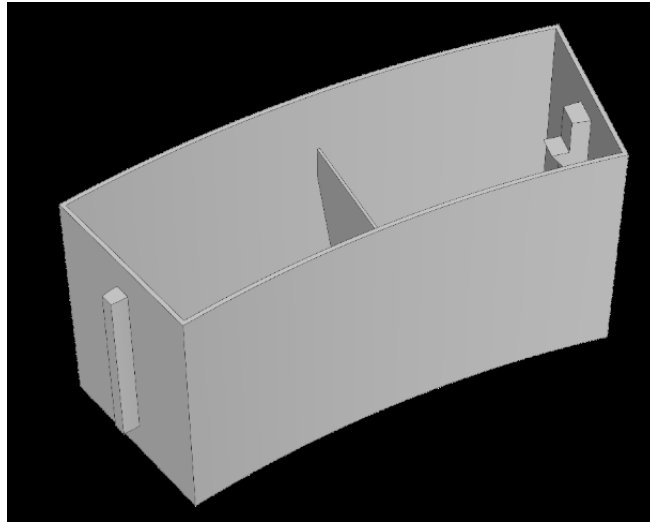


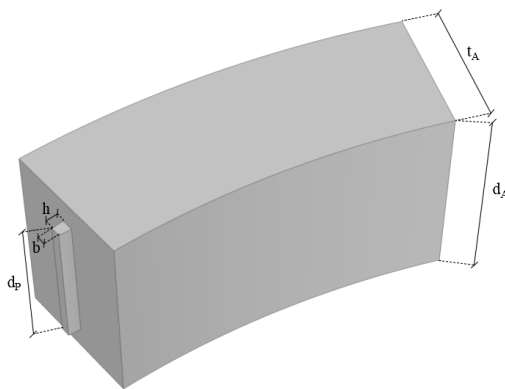
Fig. 73 - Vista assonometrica di una cassaforma del modello A

Il riempimento è costituito da una miscela di cemento, aggregati (sabbia, elementi in fibra lunga di PVC) e resina, ottenendo in questo modo un composto dall'elevata durezza e perfetta adesione lungo le pareti della cassaforma.

Inoltre tutte le superfici esterne, ad eccezione di quelle che presentano il sistema di interfaccia, sono rivestite da uno strato di fibra di vetro a fibra corta per incrementare ulteriormente la durezza dei blocchi.

La geometria effettiva di ogni blocco, influenzata dalla precisione di stampa 3D e dallo spessore della copertura in fibra di vetro, viene misurata con un calibro ad alta precisione.

Le caratteristiche geometriche finali del singolo blocco sono riportate di seguito:



Caratteristiche Modello A

t_A [m]	0.056
t_A / a	0.16
d_A [m]	0.07
h [m]	0.0046
d_p [m]	0.05

Fig. 74 - Modello A: parametri geometrici del blocco e del sistema di interfaccia.

Modello B

Il secondo modello schematizzato in figura 75 implementa il sistema di interfaccia del modello A con linee di incernieramento all'estradosso e all'intradosso dei blocchi.

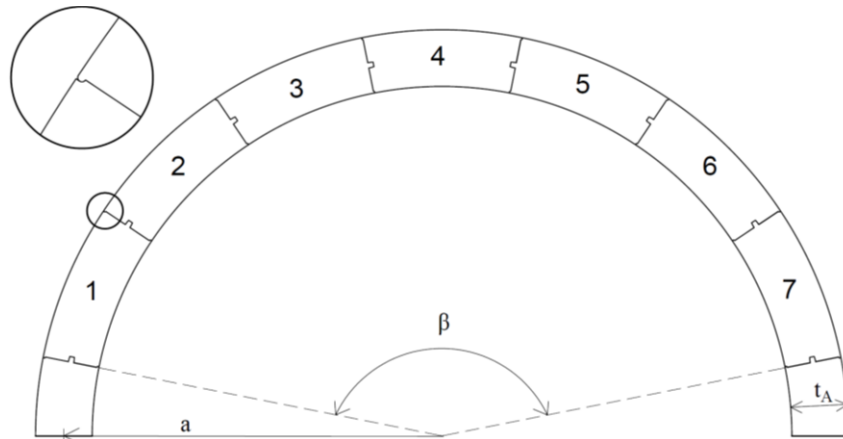


Fig. 75 - Sezione schematica del modello B

La presenza delle cerniere porta ad una riduzione del valore di $t_A = 0.0505 \text{ m}$ e quindi ad un nuovo rapporto $t_A/a = 0.144$ (dove $a = 0.35 \text{ m}$) mentre tutti i restanti parametri saranno gli stessi del modello A.

Studiando dunque l'andamento dell'energia potenziale di questo nuovo sistema (Fig. 76) si ricava il valore $\phi_{lim} = 0.066 \text{ rad}$ e, dallo studio del cinematismo, un valore di $\varphi_{lim} \cong 0.174 \text{ rad}$.

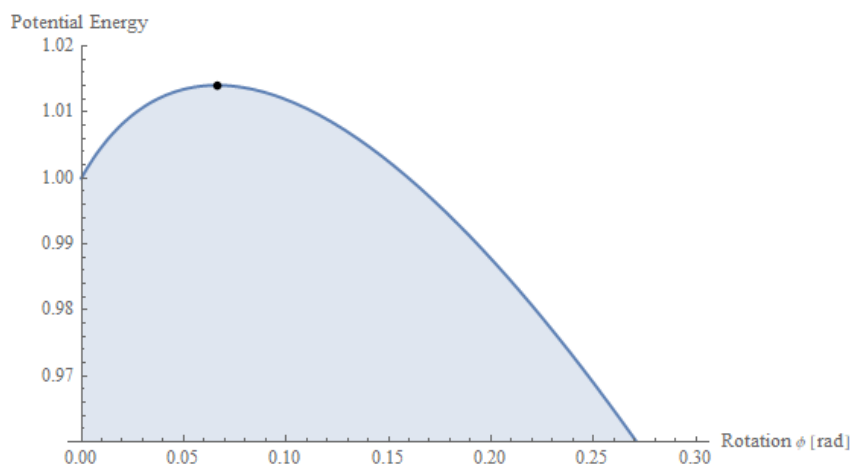
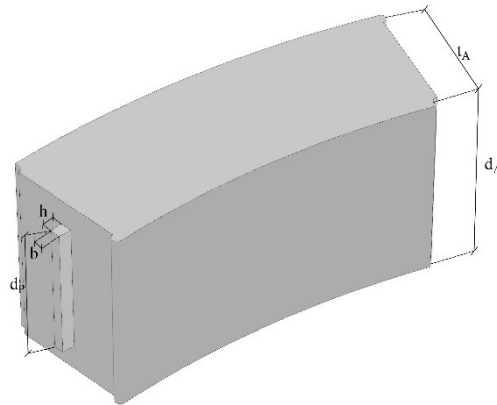


Fig. 76 - Andamento dell'energia potenziale per un arco con $\beta = 157.5^\circ$ e $t_A/a = 0.144$

Per quanto riguarda il valore limite di apertura rispetto ai blocchi vincolati alla base, rimane pressoché invariato rispetto al *modello A*, si assume quindi $\varphi_{c\lim} = 0,067 \text{ rad}$. Da questi valori si ottengono le caratteristiche geometriche del sistema di interfaccia: $h = 0.0044 \text{ m}$ calcolato per $\varphi_{\lim} = 0.174 \text{ rad}$ e $h_c = 0.0046 \text{ m}$ calcolato per $\varphi_{c\lim} = 0,067 \text{ rad}$ relativo ai blocchi alla base.

Le caratteristiche geometriche del singolo blocco sono riportate di seguito:



Caratteristiche Modello B

t_A [m]	0.0505
t_A / a	0.14
d_A [m]	0.07
h [m]	0.0044
d_p [m]	0.05

Fig. 77 - *Modello B*: parametri geometrici del blocco e del sistema di interfaccia.

Anche per questo modello la fase di realizzazione ha previsto in primo luogo la stampa 3D di una cassaforma in PLA dallo spessore nominale di 1.2 mm con elemento di irrigidimento interno (Fig. 78) e successivamente il riempimento della stessa con un impasto. Il *modello B* si differenzia dal *modello A* per i materiali di riempimento costituiti questa volta solo da resina epossidica ed aggregati fini.

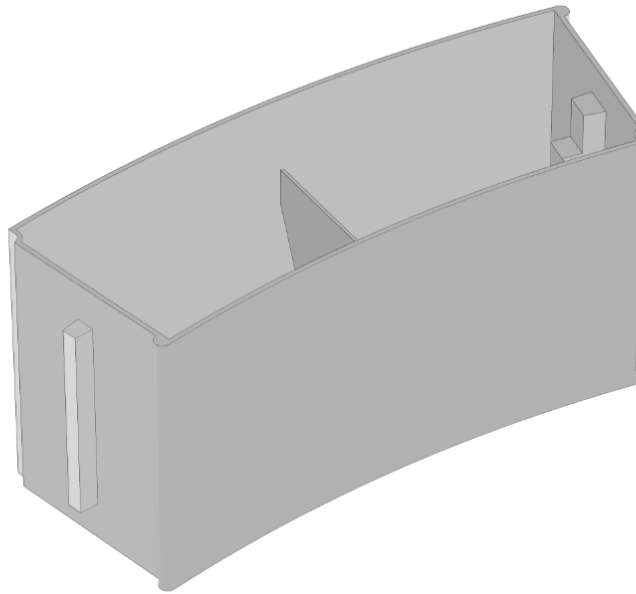


Fig. 78 - Vista assonometrica di una cassaforma del *modello B*

5.2 Layout dell'apparato sperimentale

I due modelli di arco descritti sono stati testati utilizzando un setup sperimentale specificatamente configurato per test dinamici su modelli in scala.

Gli esperimenti sono stati effettuati su uno shaker monoassiale composto da un eccitatore modale elettrodinamico Brüel & Kjær Tipo 4824 (carico dinamico massimo 100 N, spostamento massimo 25.4 mm, range frequenza operativa utile 2 – 5000 Hz) collegato direttamente ad una trave studiata e realizzata ad hoc per ospitare il modello ad arco. Il sistema comprende inoltre un generatore di funzioni arbitrarie Textronix AFG320 utilizzato per creare il segnale da inviare ad un amplificatore di potenza Brüel & Kjær Tipo 2732 che, a sua volta, aziona lo shaker. Ciò consente di spostare il campione in base alle cronologie temporali specifiche, come gli impulsi, o di simulare azioni sismiche. Per acquisire i parametri dinamici durante il test sono stati posti due trasduttori di spostamento (LVDT) alla base del telaio. In particolare, un trasduttore ha consentito di monitorare la cronologia degli spostamenti orizzontali effettivi impressi sulla struttura, mentre un secondo trasduttore ha consentito di monitorare eventuali spostamenti verticali indesiderati della trave che sostiene l'arco.

Per acquisire la cronologia temporale dell'accelerazione di base effettiva impressa al modello è stato impiegato un accelerometro piezoelettrico. I dati dei trasduttori e dell'accelerometro sono stati elaborati da un codice specifico scritto in LabVIEW.

Infine, una telecamera ad alta velocità è stata utilizzata per monitorare l'arco durante il test.

Un disegno schematico della configurazione descritta è mostrato in figura 79.

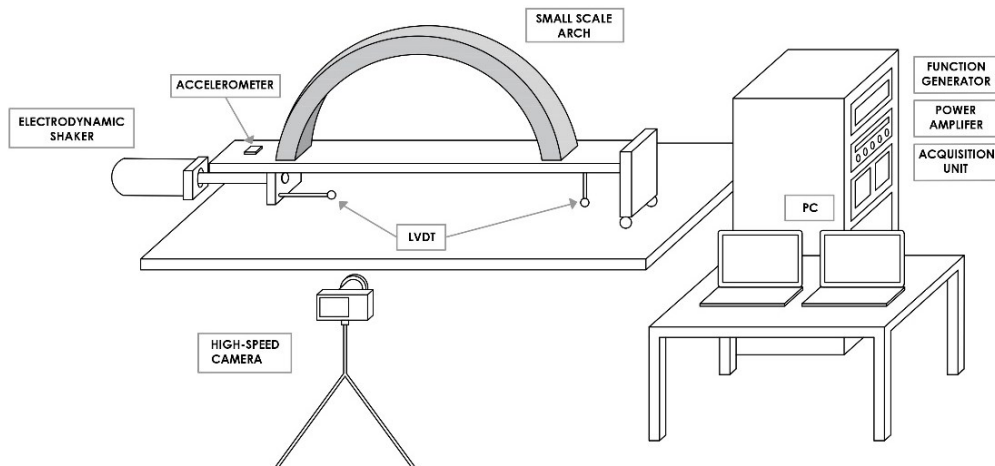


Fig. 79 - Rappresentazione schematica del setup sperimentale per test dinamici

5.2.1 Sistema di eccitazione e controllo dei segnali

Per quanto riguarda il tipo di eccitazione dinamica da applicare al sistema, sono stati eseguiti diversi esperimenti preliminari, sia con segnali continui (cronologia dei tempi di accelerazione armonica e sismica) sia con impulsi di forma diversa (sinusoidale, rettangolare e triangolare). L'obiettivo era infatti comprendere l'eccitazione più adatta in termini di corrispondenza tra impulso teorico imputato nel sistema di controllo e impulso effettivo impresso all'arco; il tutto in base alla forma d'onda acquisita dai trasduttori applicati alla trave che supporta il modello dell'arco.

Facendo riferimento al metodo dell'impulso primario [21], si è scelto dunque di applicare impulsi sinusoidali che risultano anche coerenti con quelli assunti per i calcoli teorici e nei diversi modelli analitici di riferimento. Si noti inoltre che, secondo [53] [42] e [54], utilizzando opportuni impulsi sinusoidali è possibile anche simulare adeguatamente gli effetti del terremoto su una struttura oscillante.

In fase applicativa, come accennato, si verifica che, nella generazione dell'impulso, l'input che viene dato al sistema non corrisponde all'output impresso all'arco. Si è valutato che il modo per avvicinarsi il più possibile ad un impulso di tipo sinusoidale è quello di imprimere un'onda quadra (Fig. 80).

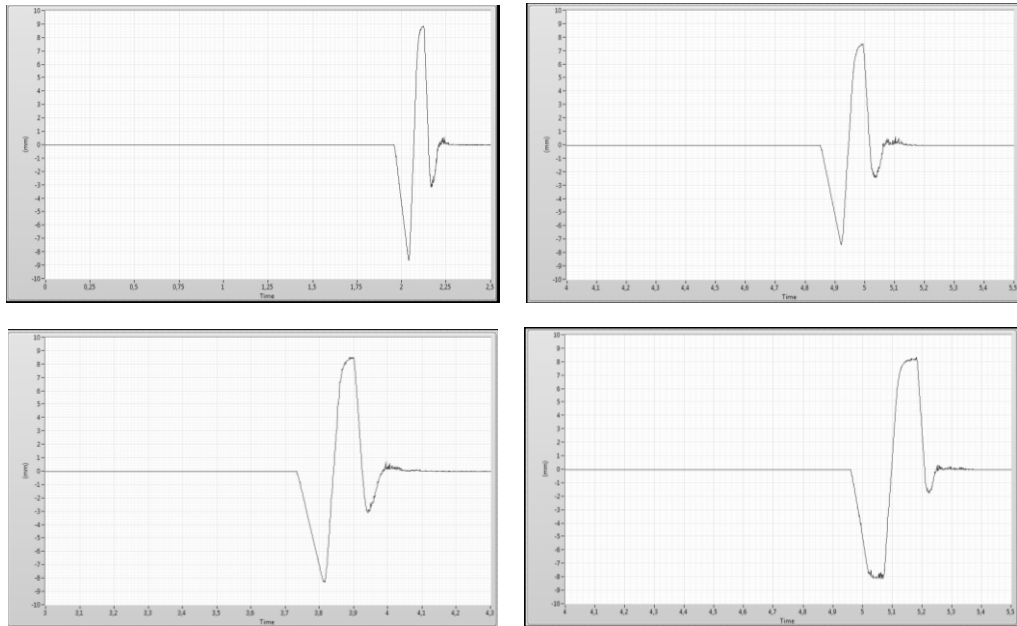


Fig. 80 - Alcuni esempi dei segnali di spostamento registrati come funzioni del tempo [s], da $F_r \cong 7.3 \text{ Hz}$ a $F_r \cong 2.5 \text{ Hz}$

5.2.2 Fattore di scala

Per confrontare i risultati teorici in [18], è necessario “scalare” i dati di prova misurati dall'accelerometro, in termini di frequenza e ampiezza, con opportuni fattori di similitudine, applicando il teorema di Buckingham [55] [56].

Secondo il teorema di Buckingham “assegnato un processo fisico dipendente da n grandezze, è sempre possibile esprimerlo con una funzione di soli $(n - k)$ gruppi adimensionali, dove k è il numero di grandezze fondamentali”.

Nel caso in questione, il fenomeno dinamico sarà influenzato da:

$$\bar{a} = (U; E; \theta_0) \tag{5.1}$$

dove:

$$U = [Mgh]; E = [\frac{1}{2}M\dot{\theta}^2]; \theta_0 = [\theta]. \tag{5.2}$$

Verifichiamo che le grandezze in gioco siano dimensionalmente indipendenti ovvero che il monomio $|U^\alpha E^\beta \theta_0^\gamma|$ sia nullo per cui si avrà:

$$|U^\alpha E^\beta \theta_0^\gamma| = 0 \rightarrow \alpha = 0; \beta = 0; \gamma = 0 \quad (5.3)$$

Da qui:

$$|U^\alpha E^\beta \theta_0^\gamma| = 0 \Leftrightarrow Kg^\alpha m^{2\alpha} s^{-2\alpha} Kg^\beta rad^{2\beta} s^{-2\beta} rad^\gamma = 0 \quad (5.4)$$

dove $U = [Kg \frac{m}{s^2} m]$; $E = [\frac{1}{2} Kg \frac{rad^2}{s^2}]$; $\theta_0 = [rad]$.

Si ha quindi:

$$Kg^\alpha m^{2\alpha} s^{-2\alpha} Kg^\beta rad^{2\beta} s^{-2\beta} rad^\gamma = 0 \quad (5.5)$$

	U	E	θ_0	Termine noto
m	2α	0	0	0
s	-2α	-2β	0	0
rad	0	2β	γ	0
Kg	α	β	0	0

Risolvendo il sistema si ricava: $\alpha = 0, \beta = 0$ e $\gamma = 0$; questo ci fa concludere che le quantità scelte sono dimensionalmente indipendenti.

Ricordando le dimensioni dell'accelerazione $\bar{a} = [\frac{m}{s^2}]$, possiamo così definire il fattore di scala:

$$Kg^\alpha m^{2\alpha} s^{-2\alpha} Kg^\beta rad^{2\beta} s^{-2\beta} rad^\gamma = ms^{-2} \quad (5.6)$$

	U	E	θ_0	Termine noto
m	2α	0	0	1
s	-2α	-2β	0	-2
rad	0	2β	γ	0
Kg	α	β	0	0

Risolvendo il sistema si ottiene: $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $\gamma = -1$.

Si ha quindi:

$$\frac{Kg m^2}{s^2} * \frac{Kg^2 rad^2}{s^2} * \frac{1}{rad^2} = \frac{Kg^3 m^2}{s^4}. \quad (5.7)$$

Il fenomeno fisico indagato dipende da un unico numero adimensionale N costituito da un elemento costante dato dalla massa e dal rapporto di tempo al quadrato e raggio medio:

$$N = \frac{\bar{a}}{|U^\alpha E^\beta \theta_0^\gamma|} = \frac{\frac{m}{s^2}}{\frac{Kg^3 m^2}{s^4}} = \frac{s^2}{Kg^3 m}. \quad (5.8)$$

Grazie al fattore di scala è possibile scalare adeguatamente l'impulso attraverso la relazione:

$$\frac{\tau_r^2}{R_r} = \frac{\tau_s^2}{R_s}, \quad (5.9)$$

dove τ_r e τ_s sono i periodi e R_r e R_s i raggi medi, rispettivamente del modello in scala 1:1 e del modello in scala ridotta.

Dall'altra parte, invece, l'accelerazione del modello reale a_r e del modello in scala a_s rimane invariata:

$$a_r = a_s. \quad (5.10)$$

Per comprendere meglio quanto espresso si possono confrontare i risultati ottenuti, in termini di rotazione relativa e tempo, per tre archi. Partendo dal primo arco (analizzato nel §4.1) che utilizzeremo come modello reale di riferimento caratterizzato da un $R_r = 10m$ e uno spessore $t = 1.5m$, il secondo arco è stato ottenuto applicando una riduzione di scala di 0.5 alle due grandezze mantenendo così inalterato il rapporto tra le due: $\frac{t}{R} = 0.15$. Il secondo arco è stato analizzato applicando una serie di impulsi con la stessa accelerazione degli impulsi del primo modello ma periodo scalato secondo la relazione:

$$t_s = t_r \sqrt{\frac{R_s}{R_r}}, \quad (5.11)$$

ricavata dalla (5.9).

I due risultati sono rappresentati da curve con un andamento sovrapponibile (Figg. 81-82) che corrisponde in entrambi i casi ad uno stato di recovery (per $t_p = 0.4s$ per il primo arco e $t_p = 0.28s$ per il secondo arco) e a due stati di collasso ($t_p = 0.42s$; $t_p = 0.44s$ e $t_p = 0.30s$; $t_p = 0.31s$). Si può quindi affermare che la relazione (5.9) sia valida per modelli che mantengono le stesse proporzioni geometriche.

Diversamente accade laddove le proporzioni variano anche di poco. Il terzo arco si riferisce infatti ad un modello avente rapporto geometrico $\frac{t}{R} = 0.14$ (modello B analizzato nel § 5.1) sottoposto ad una serie di impulsi scalati con lo stesso criterio del secondo arco.

In tal caso la risposta del sistema, che mostra sole situazioni di collasso (Fig.83), appare lontana dalla risposta del modello reale.

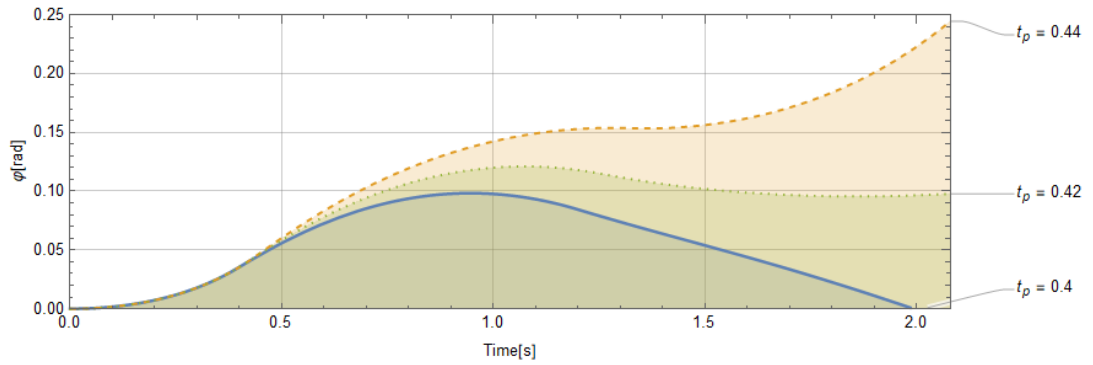


Fig. 81 - Diagramma $\varphi[rad]$ -tempo[s] relativo ad un arco $t/R=0.15$ sottoposto a tre impulsi rettangolari: $t_p = 0.4s$; $t_p = 0.42s$ e $t_p = 0.44s$

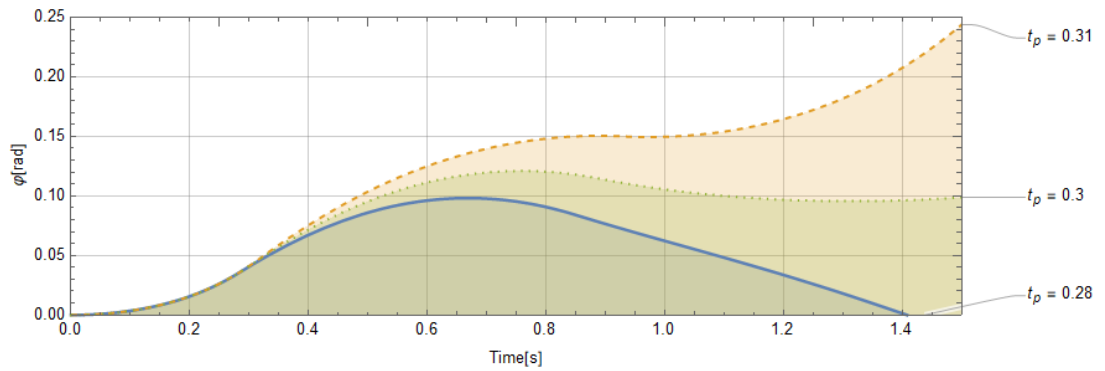


Fig. 82 - Diagramma $\varphi[rad]$ -tempo[s] relativo ad un arco $t=0.75$ m; $R=5$ m e $t/R=0.15$ sottoposto a tre impulsi rettangolari: $t_p = 0.28$; $t_p = 0.3s$ e $t_p = 0.31s$

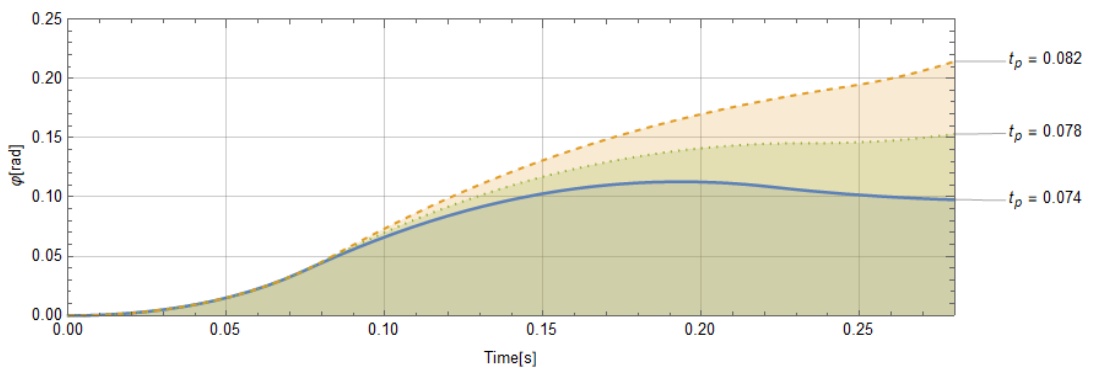


Fig. 83 - Diagramma $\varphi[rad]$ -tempo[s] relativo ad un arco $t=0.75$ m; $R=5$ m e $t/R=0.14$ sottoposto a tre impulsi rettangolari: $t_p = 0.074$; $t_p = 0.078s$ e $t_p = 0.082s$

5.3 Prova di tilting

Tilting test

Un primo metodo che implementa l'analisi statica equivalente è quello che utilizza il "tilting" della superficie del terreno [10]. Tale metodo non è in grado di catturare effettivamente la dinamica strutturale in quanto trascura il fatto che l'applicazione delle accelerazioni prodotte da un sisma è limitato nel tempo ed è di tipo dinamico quindi variabile in modulo, direzione e verso. Tuttavia esso provvede ad una misura del carico orizzontale che la struttura può sostenere prima del collasso.

Accelerazione orizzontale \ddot{u}_h e verticale \ddot{u}_v sono direttamente legate all'angolo di inclinazione α per mezzo della relazione:

$$\gamma = \frac{\ddot{u}_h}{\ddot{u}_v} = \tan\alpha \quad (5.12)$$

Prendendo in considerazione un singolo blocco a sezione rettangolare, soggetto a peso proprio, la linea delle pressioni è in direzione verticale passante per il centro di massa; il collasso per ribaltamento si verificherà non appena l'inclinazione della base supererà l'angolo critico α_{cr} (Fig. 84), ovvero l'angolo per cui la linea delle pressioni raggiunge uno degli spigoli di base.

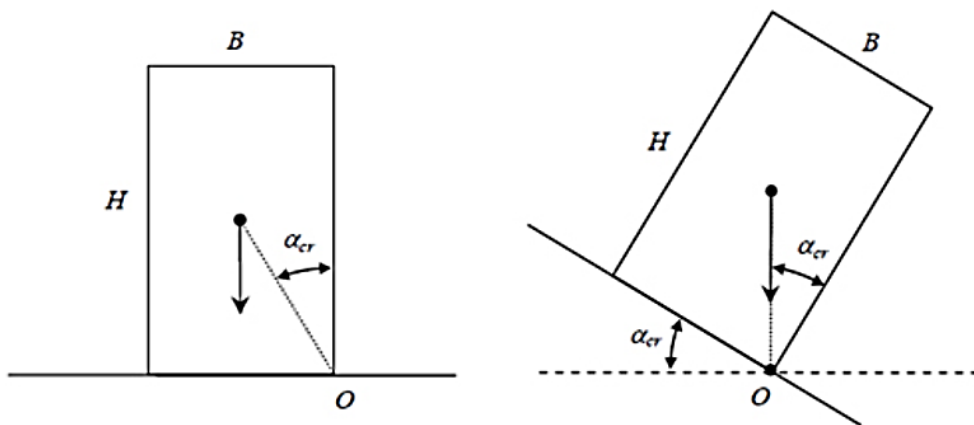


Fig. 84 - Blocco rigido in moto di rotazione per effetto di una accelerazione sismica orizzontale

Richiamando tali concetti teorici, al fine di individuare il valore dell'accelerazione in corrispondenza del quale si attiva il meccanismo, è stata effettuata una prova di tilting inclinando il piano di appoggio dell'intero sistema (si ricorda che il meccanismo

dell'arco è caratterizzato dalla formazione di quattro cerniere disposte in maniera alternata tra intradosso ed estradosso).

Da questa prova sono individuati, per i due modelli, l'angolo limite di inclinazione del piano per l'attivazione del meccanismo (γ) e la corrispondente accelerazione orizzontale (λ):

	γ [°]	λ [g]
Modello A	21,2	0,38
Modello B	17	0,31

Tab. 4 - Angolo limite di inclinazione del piano e corrispondente accelerazione orizzontale nei due modelli

Per analizzare i risultati della prova è stato inoltre sviluppato un tool computazionale in Geogebra che, in maniera semplice e interattiva, permette l'applicazione del teorema statico dell'analisi limite, ossia la ricerca di una curva delle pressioni contenuta all'interno dello spessore dell'arco.

Una volta fissate le caratteristiche geometriche dell'arco è stato inserito uno *slider* in grado di governare l'inclinazione del piano di imposta a cui corrisponde una rotazione rigida dell'arco e quindi la formazione di un carico orizzontale.

Attraverso quindi un procedimento iterativo, che consiste nell'inclinazione progressiva dell'arco e la successiva ricerca di almeno una linea delle pressioni interamente contenuta nel suo spessore (Fig. 85), viene individuato l'angolo limite ovvero l'ultimo valore dell'angolo di tilting per cui è ancora possibile trovare almeno una curva delle pressioni che non sia tangente alle superfici limite per quattro o più punti.

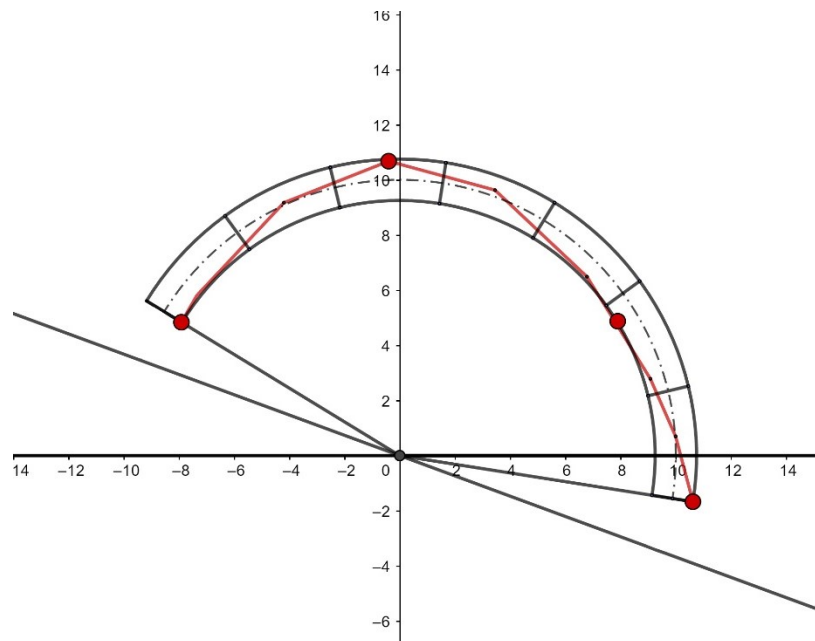


Fig. 85 - Analisi del *modello A* soggetto a tilting sul tool Geogebra

5.4 Prova dinamica

L'esecuzione delle prove dinamiche per entrambi i modelli è avvenuta predisponendo una strategia di prova che potesse esplorare ampiezze via via crescenti per ogni frequenza fissa F_r fino al collasso dell'arco.

E' stata dunque esplorata una gamma di interesse di frequenze (da 7Hz a 2Hz circa) approssimando sperimentalmente in questo modo la curva di collasso dei due archi.

Si noti che nel banco di prova dinamico impiegato, una volta assegnata la forma dell'impulso, si possono liberamente imporre alla macchina di prova la frequenza e l'ampiezza del segnale.

Per ogni valore di frequenza le prove, ad ampiezza crescente, sono state ripetute più volte al fine di evitare errori sperimentali. In questo modo, è stato raccolto un gran numero di dati rispettivamente per il *modello A* (Tab. 5) e per il *modello B* (Tab. 6).

Frequenza [Hz]	Periodo [s]	Accelerazione [g]	Ampiezza [mm]	Esito
7,57	0,1321	1,2453	5,400	Failure
7,35	0,1361	1,1088	5,100	Recovery
7,33	0,1364	1,2044	5,570	Failure
7,32	0,1366	1,4900	6,910	Failure
7,25	0,1379	1,0471	4,950	Recovery
7,20	0,1389	1,3644	6,540	Failure
7,19	0,1391	0,8925	4,290	Recovery
7,12	0,1404	0,9629	4,720	Recovery
7,05	0,1418	0,9081	4,540	Recovery
7,03	0,1422	1,2013	6,040	Failure
6,69	0,1495	1,2158	6,750	Failure
6,83	0,1464	0,8035	4,280	Recovery
6,60	0,1515	0,9957	5,680	Failure
6,56	0,1524	0,8243	4,760	Failure
6,53	0,1531	0,8666	5,050	Failure
6,47	0,1546	0,7817	4,640	Recovery
6,38	0,1567	0,6323	3,860	Recovery
6,30	0,1587	0,8641	5,410	Failure
6,29	0,1590	0,8821	5,540	Failure
6,15	0,1626	0,8006	5,260	Recovery
6,06	0,1650	0,7833	5,300	Recovery
6,05	0,1653	0,8971	6,090	Failure
5,97	0,1675	0,8276	5,770	Failure
5,79	0,1727	0,7528	5,580	Failure
5,66	0,1767	0,8096	6,280	Failure
5,10	0,1961	0,6437	6,150	Failure
4,73	0,2114	0,5708	6,340	Failure
4,59	0,2179	0,5214	6,150	Failure
4,54	0,2203	0,4869	5,870	Recovery
4,11	0,2433	0,4337	6,380	Failure
3,91	0,2558	0,3624	5,890	Recovery
3,84	0,2604	0,3667	6,180	Failure
2,78	0,3598	0,2600	8,366	Recovery
2,77	0,3606	0,2741	8,862	Failure
2,74	0,3643	0,2477	8,173	Recovery
2,74	0,3647	0,2381	7,872	Recovery
2,64	0,3785	0,2405	8,565	Failure
2,43	0,4118	0,1751	7,382	Failure
2,40	0,4164	0,1214	5,235	Recovery
2,25	0,4438	0,1008	4,934	Recovery
2,22	0,4511	0,1073	5,427	Failure
2,16	0,4635	0,1290	6,890	Failure
2,14	0,4658	0,1098	5,921	Failure
1,63	0,6133	0,0947	8,863	Recovery
1,61	0,6177	0,1039	9,856	Failure
1,50	0,6653	0,0716	7,877	Recovery
1,46	0,6844	0,0820	9,554	Recovery

Tab. 5 - Dati ed esiti della prova dinamica sul *modello A*

Frequenza [Hz]	Periodo [s]	Accelerazione [g]	Ampiezza [mm]	Esito
7,34	0,1362	0,93446	4,31	Failure
7,25	0,1379	0,89899	4,25	Failure
7,20	0,1388	0,79901	3,83	Recovery
6,86	0,1457	0,81623	4,31	Failure
6,50	0,1538	0,48797	2,87	Recovery
6,26	0,1597	0,60557	3,84	Failure
5,89	0,1697	0,56961	4,08	Failure
5,79	0,1727	0,52345	3,88	Failure
5,66	0,1766	0,81478	6,32	Failure
5,60	0,1785	0,43161	3,42	Recovery
5,52	0,1811	0,35560	2,90	Recovery
5,44	0,1838	0,35013	2,94	Recovery
5,32	0,1880	0,39180	3,44	Recovery
5,27	0,1897	0,33194	2,97	Recovery
5,16	0,1937	0,46824	4,37	Failure
4,99	0,2004	0,63630	6,35	Failure
4,79	0,2087	0,31855	3,45	Recovery
4,73	0,2114	0,48439	5,38	Failure
4,73	0,2114	0,27788	2,97	Recovery
4,68	0,2136	0,45040	5,11	Recovery
4,52	0,2212	0,72352	8,80	Failure
4,36	0,2293	0,37638	4,92	Recovery
4,29	0,2331	0,47252	6,38	Failure
4,28	0,2336	0,54257	7,36	Failure
4,10	0,2439	0,38559	5,70	Recovery
4,08	0,2451	0,55869	8,34	Failure
4,07	0,2457	0,42663	6,40	Recovery
4,06	0,2463	0,35953	5,42	Recovery
4,02	0,2487	0,43508	6,69	Failure
3,99	0,2506	0,37863	5,91	Recovery
3,99	0,2506	0,36872	5,71	Recovery
3,74	0,2673	0,38784	6,89	Recovery
3,52	0,2840	0,29419	5,91	Recovery
3,40	0,2941	0,41217	8,86	Failure
3,31	0,3021	0,32538	7,38	Recovery
3,23	0,3095	0,39256	9,35	Failure
3,11	0,3215	0,27890	6,89	Recovery
3,11	0,3215	0,24872	6,39	Recovery
2,84	0,3521	0,30348	9,35	Failure
2,49	0,4016	0,22106	8,86	Recovery
2,44	0,4172	0,50377	9,35	Recovery
2,27	0,4405	0,20405	9,84	Recovery

Tab. 6 - Dati ed esiti della prova dinamica sul *modello B*

5.5 Analisi dei dati

5.5.1 Dominio di rottura *Modello A*

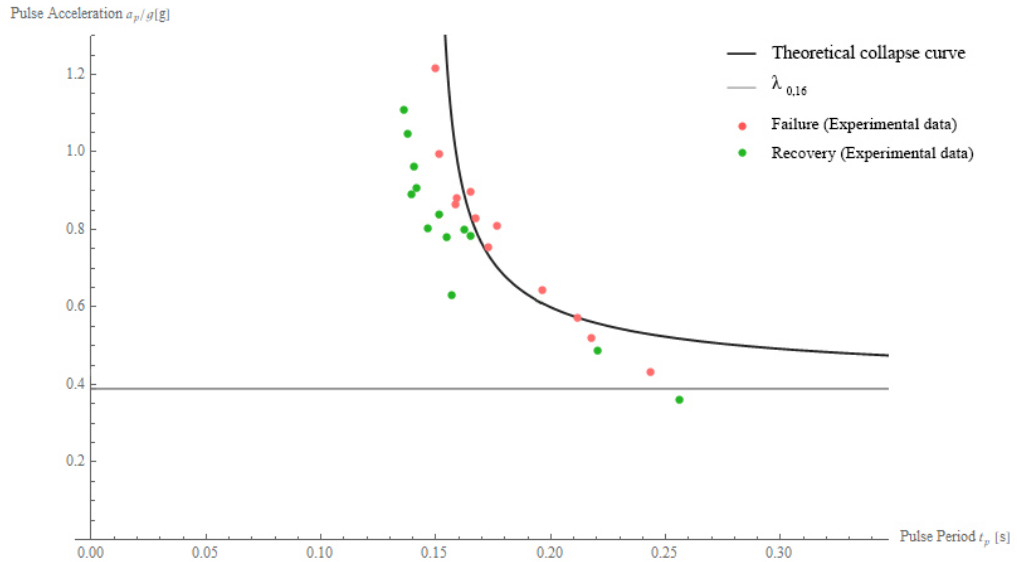


Fig. 86 - Confronto tra la curva di collasso teorica (per un arco con $t/a=0.16$) e i risultati dei test sperimentali effettuati sul *modello A*

La figura 86, riporta nel diagramma accelerazione dell'impulso (g) - periodo dell'impulso (s), la curva teorica di collasso e i punti di recupero e di collasso osservati durante l'esperimento.

Viene inoltre tracciata la soglia di accelerazione per l'attivazione del meccanismo determinata dall'Analisi Limite. Essa rappresenta il limite asintotico per l'accelerazione dell'impulso che provoca il collasso all'aumentare del periodo ($\lambda_{0,16}$).

Dal diagramma emerge che sia i punti di collasso che i punti di recupero determinati sperimentalmente sono coerenti con il dominio teorico, sicché le prove di laboratorio confermano il comportamento qualitativo previsto dalla teoria e quindi le ipotesi sottostanti per la modellazione delle dinamiche dell'arco. Queste ultime rappresentano un'estrapolazione del campo dinamico all'approccio classico di Heyman.

Inoltre, la banda contenente i punti di cedimento segue ragionevolmente lo sviluppo della curva teorica: ciò indica l'efficacia della strategia di prova proposta per simulare l'effettivo comportamento dinamico degli archi in muratura con modello in scala ridotta. Si noti che non esistono punti di collasso sperimentali al di sotto della soglia di accelerazione per l'attivazione del meccanismo determinata dall'Analisi Limite, a conferma che questo valore di accelerazione può essere considerato come una stima sicura della capacità sismica dell'arco in muratura in assenza di analisi più complesse.

Ne risulta che vi è una buona previsione di collasso per le alte frequenze ($\sim 7 \text{ Hz}$) ma che la stabilità dell'arco è sottovalutata per le frequenze medio-basse ($\sim 4 \text{ Hz}$). Per ogni gamma di frequenze i risultati vengono così interpretati:

Medio-basse frequenze (4 Hz): In corrispondenza delle medio-basse frequenze il modello registra fenomeni di collasso per valori di accelerazione più bassi rispetto ai valori ricavati analiticamente. L'andamento del dominio per tali valori si discosta perciò dal teorico andamento asintotico. Non vengono registrati fenomeni di scorrimento prima del collasso ma, durante la migrazione delle cerniere dal primo meccanismo a quattro cerniere (Fig. 87) al secondo, si assiste ad un impuntamento tra i conci che causa fenomeni di instabilità e un collasso prematuro della struttura. Questo è dovuto al fatto che l'incernieramento avviene in corrispondenza dello spigolo vivo dei blocchi.

Alte Frequenze (7 Hz): Per le alte frequenze si verifica un comportamento compatibile con la curva teorica. I diversi test mostrano un collasso al secondo ciclo con superamento dell'angolo limite di rotazione tra il secondo e il terzo concio.



Fig. 87 - Fermo immagine del meccanismo ad arco a quattro maglie formatosi durante le prove dinamiche nel modello A

5.5.2 Dominio di rottura Modello B

Le criticità osservate a conclusione della prova sperimentale sul modello A, ovvero i fenomeni di instabilità dovuti agli spigoli vivi dei blocchi in corrispondenza dei quali avviene l'incernieramento, hanno portato alla definizione del modello B. In particolare,

come descritto in § 5.1, il sistema di interfaccia del *modello A* risulta implementato con linee di incernieramento tra estradosso ed intradosso dei blocchi.

Durante la prova sperimentale il *modello B* innanzitutto si mostra coerente con il modello teorico del “four-link mechanism” nella formazione di cerniere, come mostrato in figura 88, all’intradosso tra il blocco vincolato alla base e il blocco 1 e tra i conci 7-8; e all’estradosso tra i conci 3-4 e tra il blocco 7 e il blocco vincolato al supporto.

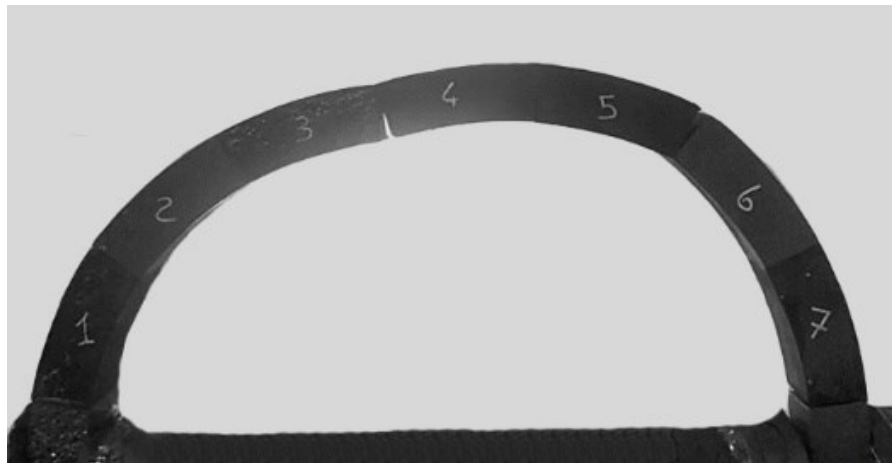


Fig. 88 - Fermo immagine del meccanismo ad arco a quattro maglie formatosi durante le prove dinamiche nel *modello B*

Inoltre il nuovo modello ha prodotto significative variazioni nella definizione del dominio di rottura come mostrato in figura 89:

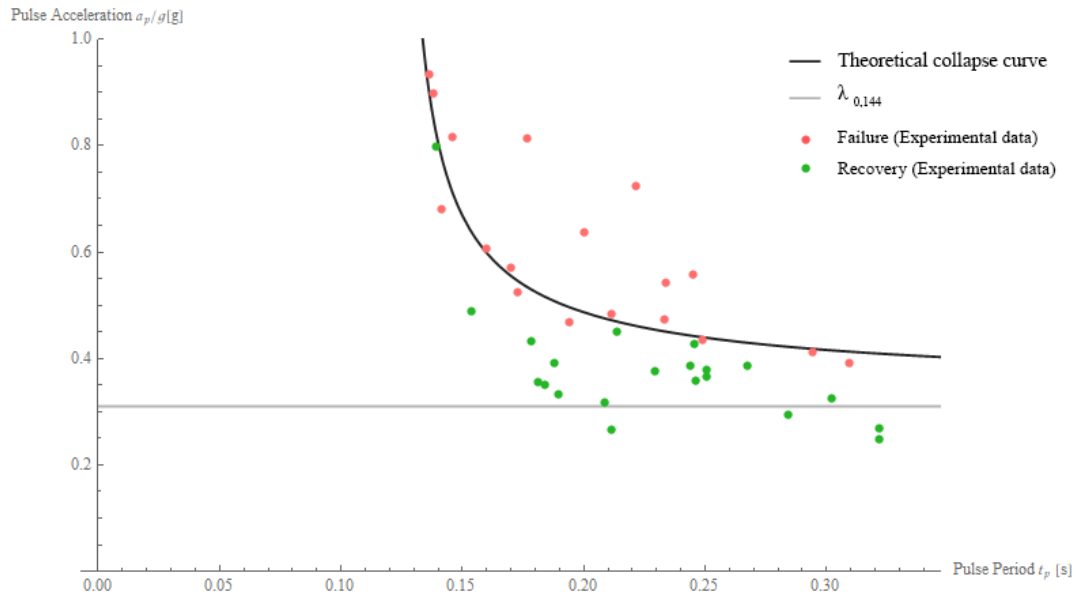


Fig. 89 - Confronto tra la curva di collasso teorica (per un arco con $t/a=0.144$) e i risultati dei test sperimentali effettuati sul *modello B*

Dal diagramma emerge che sia i punti di collasso che i punti di recupero determinati sperimentalmente sono coerenti con il dominio teorico, confermando il comportamento qualitativo previsto dalla teoria e quindi le ipotesi sottostanti per la modellazione delle dinamiche dell'arco. In particolare emerge come la stereotomia delle linee di cerniera abbia ovviato ai problemi emersi dalle prove dinamiche sul *modello A*. Questo permette di studiare il comportamento dinamico del modello per una gamma più alta di frequenze. Sia i risultati ottenuti con le alte che con le basse frequenze risultano, infatti, perfettamente coerenti con il modello teorico e con il valore limite di accelerazione per l'attivazione del meccanismo determinata dall'Analisi Limite ($\lambda_{0.144}$).

Capitolo 6

CONCLUSIONI

L'obiettivo principale di questo lavoro, così come indicato nel § 1.2, è duplice:

- Incrementare la comprensione sul comportamento dinamico delle strutture in muratura sotto azioni sismiche ed in particolare sul comportamento di strutture curve che, per loro natura, presentano maggiori complessità;
- Sviluppare un metodo di analisi sperimentale che consenta una valutazione adeguata delle strutture curve soggette a sollecitazioni sismiche. Il tutto si basa sullo sviluppo di un meta-modello innovativo in grado di simulare in laboratorio il comportamento osservato nelle strutture reali e quindi di riprodurre al meglio le caratteristiche della risposta dinamica.

6.1 Riflessione sui risultati ottenuti

Sulla base degli obiettivi sopra definiti, i risultati ottenuti hanno confermato la possibilità di ottenere risposte sperimentali più coerenti con le previsioni teoriche del *rocking arch*, basato sui principi di Heyman, e quindi adatte a descrivere la risposta dinamica di archi in muratura.

In particolare l'elaborazione di un primo modello (*modello A*) e la sua successiva sperimentazione è stata fondamentale per comprendere le criticità insite nella progettazione e l'individuazione dei perfezionamenti da adottare per un successivo modello (*modello B*).

Le diverse prove sperimentali hanno portato a migliorare la strategia di prova sia in termini di frequenze che di tipologia di segnale da assegnare.

L'approccio sperimentale innovativo proposto consente di approfondire la conoscenza dei complessi fenomeni, coinvolti nei movimenti degli archi in muratura, dovuti alle azioni sismiche e di studiare gli effetti della massa, della geometria e del comportamento unilaterale durante le accelerazioni impulsive o sismiche alla base.

In particolare la scelta di sottoporre i meta-modelli a movimenti alla base di tipo impulsivo si dimostra efficace nella previsione dei fenomeni di collasso: il “primary impulse method” si rivela dunque un valido strumento per lo studio di time histories di terremoti.

6.2 Applicazioni future

Infine, i risultati di questo studio suggeriscono in prospettiva ulteriori evoluzioni del modello da utilizzare in esperimenti in scala sulla dinamica di ulteriori elementi architettonici in muratura.

Infatti, l'estensione di questo approccio sperimentale, proposto per gli archi, alle volte e alle cupole in muratura, potrebbe offrire spunti significativi per lo studio di comportamenti strutturali ancora più complessi.

Mentre l'acciaio e le strutture in CA si difendono dai terremoti attraverso la duttilità, la muratura resiste sfruttando il movimento oscillatorio del rocking. Il rocking rappresenta un comportamento molto più complesso rispetto alla risposta elastica o elastoplastica esibita dall'acciaio e dalle strutture in CA. Pertanto è cruciale continuare questa ricerca per validare procedure adatte per determinare l'attuale capacità sismica delle costruzioni in muratura, oggi spesso notevolmente sottostimata dalla normativa strutturale.

In questo modo è possibile indicare interventi di restauro più razionali evitando l'impiego di tecniche di rinforzo fin troppo invasive che spesso alterano la risposta tipica della muratura, portando a risultati controproducenti.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Di Re P, Addressi D & Sacco E, «A multiscale force-based curved beam element for masonry arches,» *Computers & Structures*, vol. 208, pp. 17-31, 2018.
- [2] Lucchesi M, Pintucchi B & Zani N, «Masonry-like material with bounded shear stress,» *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 72, pp. 329-340, 2018.
- [3] Lemos J V , «Modelling the dynamics of masonry structures with discrete elements,» *The Open Construction & Building Technology Journal*, vol. 10, pp. 210-219, 2016.
- [4] Cannizzaro F, Pantò B, Caddemi S & Calì I, «A Discrete Macro-Element Method (DMEM) for the nonlinear structural assessment of masonry arches,» *Engineering Structures*, vol. 168, pp. 243-256, 2018.
- [5] Como M , *Statics of historic masonry constructions*, Springer, 2016.
- [6] Huerta S , «Mechanics of masonry vaults: The equilibrium approach,» in *Historical Constructions, 3rd International Seminar*, Gimaraes, 2016.
- [7] Fraddosio A, Lepore N & Piccioni M D, «Lower bound limit analysis of masonry vaults under general load conditions,» *Structural Analysis of Historical Constructions*, pp. 1090-1098, 2019.
- [8] Heyman J, «The stone skeleton,» *International Journal of solids and structures*, vol. 2, n. 2, p. 249–279, 1966.
- [9] Heyman J, «The safety of masonry arches,» *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 11, n. 4, pp. 363-385, 1969.
- [10] Ochsendorf J, *Collapse of masonry structures*, University of Cambridge, 2002.
- [11] Del Piero G, «Constitutive equation and compatibility of the external loads for linear elastic masonry-like materials,» *Meccanica*, vol. 24, n. 3, pp. 150-162, 1989.

- [12] Angelillo M, «Constitutive relations for no-tension materials,» *Meccanica*, vol. 28, n. 3, pp. 195-202, 1993.
- [13] Sacco E, «Modellazione e calcolo di strutture in materiale non resistente a trazione,» *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni*, vol. 1, n. 3, pp. 235-258, 1990.
- [14] Fraddosio A, Lepore N and Piccioni, M D, «Thrust Surface Method: An innovative approach for the three-dimensional lower bound Limit Analysis of masonry vaults,» *Engineering Structures*, n. 202, p. art. no. 109846, 2020.
- [15] Angelillo M, Fortunato A, Montanino A, Lippiello M , «Singular stress fields in masonry structures: Derand was right,» *Meccanica*, n. 49(5), p. 1243–1262, 2014.
- [16] Block P, *Thrust Network Analysis: Exploring Three-dimensional Equilibrium (PhD Dissertation)*, Cambridge, USA: Massachusetts Institute of Technology, 2009.
- [17] Gesualdo A, Brandonisio G, De Luca A, Iannuzzo A, Montanino A, Olivieri C, «Limit Analysis of cloister vaults: the case study of Palazzo Caracciolo di Avellino,» *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, n. 5 (14), pp. 739-750, 2019.
- [18] Oppenheim I J, «The masonry as a four link mechanism under base motion,» *Earthquake engineering & structural dynamics*, vol. 21, n. 11, pp. 1005-1017, 1992.
- [19] Clemente P, «Introduction to dynamics of stone arches,» *Earthquake engineering & structural dynamics*, vol. 27, n. 5, pp. 513-522, 1998.
- [20] De Lorenzis L , DeJong M and Ochsendorf J, «Failure of masonry arches under impulse base motion,» *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 36, n. 14, pp. 2119-2136, 2007.
- [21] DeJong M J, De Lorenzis L, Adams S, & Ochsendorf J A, «Rocking stability of masonry arches in seismic regions,» *Earthquake Spectra*, vol. 24, n. 4, pp. 847-865, 2008.
- [22] Acocella A, *L'architettura di pietra: antichi e nuovi magisteri costruttivi*, Firenze: Alinea editrice, 2004.

- [23] Huerta S, «Wedges and plate-bandes: mechanical theories after De la Hire,» in *L'architrave, le plancher, la plate-forme. Nouvelle histoire de la construction.*, Lausanne, PPUR Presses polytechniques et universitaires romandes, 2012, pp. 405-435.
- [24] Huerta S, «Galileo was wrong: the geometrical design of masonry arches,» *Nexus Network Journal*, vol. 8, n. 2, pp. 25-52, 2006.
- [25] Heyman J, *Equilibrium of shell structures*, Oxford: Clarendon Press, 1977.
- [26] Como M, «Equilibrium and collapse analysis of masonry bodies,» *Meccanica*, vol. 27, pp. 185-194, 1992.
- [27] Fortunato A, Babilio E, Lippiello M, Gesualdo A & Angelillo M, «Limit analysis for unilateral masonry-like structures,» *The Open Construction & Building Technology Journal*, vol. 10, n. 1, 2016.
- [28] Augusti G, Sinopoli A, «Modelling the dynamics of large block structures,» *Masonry Construction*, pp. 195-211, 1992.
- [29] Housner G W, «The behaviour of inverted pendulum structures during earthquakes,» *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 53, n. 2, pp. 403-417, 1963.
- [30] Priestley M J N, Evison R J & Carr A J, «Seismic response of structures free to rock on their foundations,» *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering*, vol. 11, n. 3, pp. 141-150, 1978.
- [31] Makris N & Konstantinidis D, «The rocking spectrum and the limitations of practical design methodologies,» *Earthquake engineering & structural dynamics*, vol. 32, n. 2, pp. 265-289, 2003.
- [32] Chopra A. K., *Dynamics of structures*, Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, 2012.
- [33] Housner G W & Hudson D E, *Applied mechanics dynamics*, California Institute of Technology, 1980.
- [34] Ghersi A, Lenza P, «Elementi base di ingegneria sismica,» [Online]. Available: http://www.dica.unict.it/users/aghersi/Testi/Sismica/Capitolo_2.pdf.
- [35] Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti, *D.M. 17.01.2018: Aggiornamento delle "Norme tecniche per le costruzioni"*, Roma, 2018.

- [36] Makris N, «The Dynamics of Rocking Isolation,» *The society for earthquake and civil engineering dynamics*, vol. 26, n. 2, pp. 1-12, 2015.
- [37] Peña F, Prieto F, Lourenço P B, Campos Costa A & Lemos J V, «On the dynamics of rocking motion of single rigid-block structures,» *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 35, n. 15, pp. 2383-2399, 2007.
- [38] Aslam M, Godden W G & Scalise D T, «Earthquake rocking response of rigid bodies,» *Journal of the Structural Division*, vol. 106, n. 2, pp. 377-392, 1980.
- [39] ElGawady M A, Ma Q, Butterworth J W & Ingham J, «Effects of interface material on the performance of free rocking blocks,» *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 40, n. 4, pp. 375-392, 2011.
- [40] Makris N, «The role of the rotational inertia on the seismic resistance of free-standing rocking columns and articulated frames,» *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 104, n. 5, pp. 2226-2239, 2014.
- [41] Casapulla C & Maione A, «Rocking resonance conditions of large and slender rigid blocks under the intense phase of an earthquake,» in *6th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPDYN)*, Rhodes Island, Greece, 2017.
- [42] DeJong M J, «Amplification of rocking due to horizontal ground motion,» *Earthquake Spectra*, vol. 28, n. 4, pp. 1405-1421, 2012.
- [43] Makris N, «A half-century of rocking isolation,» *Earthquakes and Structures*, vol. 7, n. 6, pp. 1187-1221, 2014.
- [44] Giamundo V, Lignola G P, Maddaloni G, da Porto F, Prota A & Manfredi G, «Shaking table tests on a full-scale unreinforced and IMG-retrofitted clay brick masonry barrel vault,» *Bulletin of Earthquake Engineering*, vol. 14, pp. 1663-1693, 2016.
- [45] Castellano A, Fraddosio A, Scacco J, Milani G & Piccioni M D, «Dynamic response of FRCM reinforced masonry arches,» *Key Engineering Materials*, vol. 817, pp. 285-292, 2019.
- [46] Gaetani A, Lourenço P B, Monti G & Moroni M, «Shaking table tests and numerical analyses on a scaled dry-joint arch undergoing windowed sine pulses,» *Bulletin of Earthquake Engineering*, vol. 15, n. 11, pp. 4939-4961, 2017.

- [47] Gaetani A, Seismic Performance of Masonry Cross Vaults: Learning from historical developments and experimental testing, Roma: Sapienza Università Editrice, 2020.
- [48] Alforno M, Monaco A, Venuti F & Calderini C, «Validation of Simplified Micro-models for the Static Analysis of Masonry Arches and Vaults,» *International Journal of Architectural Heritage*, pp. 1-17, 2020.
- [49] Albuerne A, Pappas A, Williams M & D' Ayala D, «Experimental and numerical study of the dynamic behaviour of masonry circular arches with non-negligible tensile capacity,» *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, vol. 14, n. 5, pp. 621-644, 2019.
- [50] Williams M S, Albuerne A, Lawson V & Yip F, «Model scale shaking table tests on masonry barrel and cross vaults,» in *15th World Conference in Earthquake Engineering*, Lisbona, 2012.
- [51] De Jalon J G & Bayo E, Kinematic and dynamic simulation of multibody systems: the real-time challenge, Springer Science & Business Media, 2012.
- [52] Castellano A, Elia I, Fraddosio A, Olivieri C, Piccioni MD, «A new experimental approach for small-scale dynamic tests on masonry arches aimed at seismic assessment,» *International Journal of Masonry Research and Innovation*, In press.
- [53] Ther T & Kollár L P, «Overturning of rigid blocks for earthquake excitation,» *Bulletin of Earthquake Engineering*, vol. 16, n. 3, pp. 1607-1631, 2018.
- [54] Acikgoz S & DeJong M J, «The rocking response of large flexible structures to earthquakes,» *Bulletin of earthquake engineering*, vol. 12, n. 2, pp. 875-908, 2014.
- [55] Buckingham E, «On physically similar systems. Illustrations of the use of dimensional equations,» *Physical review*, vol. 4, n. 4, p. 345, 1914.
- [56] Dimitrakopoulos E G & DeJong M J, «Revisiting the rocking block: closed-form solutions and similarity laws,» *Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 468, n. 2144, pp. 2294-2318, 2012.
- [57] Del Piero G, «Limit analysis and no-tension materials,» *International Journal of Plasticity*, n. 17(1-3), pp. 259-271, 1998.

- [58] Huerta Fernandez S & Hernando de la Cuerda R, «La teoría de bóvedas en el siglo XVIII: la contribución de Philippe de la Hire,» in *Segundo Congreso Nacional de Historia de la Construcción*, A Coruña, 1998.
- [59] Benvenuto E, *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*, Firenze: Sansoni, 1981.

NOTAZIONI

Si segnalano le seguenti notazioni:

Nel paragrafo 4.1:

G_i = baricentro dei macroblocchi

l_i = lunghezza dei link

n_{B_i} = numero dei voussoir in cui è suddiviso l'arco

Q_i = sistema di forze esterne associato al sistema pre-impatto

r_i = distanza dei baricentri dei tre macroblocchi dal punto di incernieramento

R_m = raggio medio dell'arco

t = spessore dell'arco

t_p = periodo dell'impulso

T_i = energia cinetica del sistema pre-impatto

V_i = energia potenziale del sistema pre-impatto

α = angolo di embrace dell'intero arco

α_i = angolo di apertura dei macroblocchi formati da n_{B_i} voussoir

β = angolo di apertura del singolo voussoir

ϑ_0 = angolo della configurazione originaria

ϑ_i = angolo di rotazione dei link rispetto all'orizzontale

$\tilde{\vartheta}_i$ = funzione che lega i parametri ϑ_2, ϑ_3 al parametro lagrangiano ϑ_1

φ = angolo di rotazione rispetto alla configurazione di riferimento

ψ_i = angolo di rotazione tra link l_i e distanza r_i

Nel paragrafo 4.3:

a = raggio medio dell'arco

h = altezza piolo

O' = generico punto di rotazione all'intradosso del modello di arco

O'' = generico punto di rotazione all'estradosso del modello di arco

$r' = r''$ = raggi di rotazione intorno al punto di incernieramento

t_A = spessore dell'arco

β = angolo di embrace dell'intero arco

φ_{lim} = angolo critico di rotazione relativo tra i conci

Φ_{lim} = angolo critico di collasso

Nel paragrafo 5.1:

a = raggio medio dell'arco

b = larghezza del piolo

d_A = profondità dell'arco

d_p = profondità del piolo

h = altezza piolo

n = numero di voussoir

t_A = spessore del modello di arco

β = angolo di embrace dell'intero arco

φ = generico angolo di apertura tra i conci

φ_c = generico angolo di apertura tra i blocchi vincolati alla base e i restanti blocchi

$\varphi_{c\lim}$ = angolo critico di rotazione relativo ai conci alla base

φ_{lim} = angolo critico di rotazione relativo tra i conci

Φ_{lim} = angolo critico di collasso

Nel sottoparagrafo 5.2.2:

a_r = accelerazione del modello in scala 1:1

a_s = accelerazione del modello in scala ridotta

R_r = raggio medio del modello in scala 1:1

R_s = raggio medio del modello in scala ridotta

t_r = periodo modello in scala 1:1

t_s = periodo modello in scala ridotta