



Politecnico di Bari

Repository Istituzionale dei Prodotti della Ricerca del Politecnico di Bari

Un nuovo approccio teorico e sperimentale allo studio della meccanica dell'impatto nella dinamica del rocking di strutture in muratura

This is a PhD Thesis

Original Citation:

Un nuovo approccio teorico e sperimentale allo studio della meccanica dell'impatto nella dinamica del rocking di strutture in muratura / Martellotta, Gianfranco. - ELETTRONICO. - (2025). [10.60576/poliba/iris/martellotta-gianfranco_phd2025]

Availability:

This version is available at <http://hdl.handle.net/11589/281241> since: 2025-01-03

Published version

DOI:10.60576/poliba/iris/martellotta-gianfranco_phd2025

Publisher: Politecnico di Bari

Terms of use:

(Article begins on next page)



Politecnico
di Bari

—
Ar
Co
D

dipartimento
Architettura
Costruzione
Design

CORSO DI DOTTORATO IN
CONOSCENZA E INNOVAZIONE NEL PROGETTO PER IL PATRIMONIO
CURRICULUM: COSTRUZIONI
SSD: CEAR-06/A - SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Un nuovo approccio teorico e sperimentale allo studio della meccanica dell'impatto nella dinamica del rocking di strutture in muratura

Tesi di dottorato di:
Gianfranco Martellotta

Tutor: Prof. Ing. Mario Daniele PICCIONI
Co-tutor: Dott.ssa Ing. Anna CASTELLANO

Coordinatore del Corso di Dottorato:
Prof. Arch. Carlo MOCCIA
XXXVII Ciclo, 2021 – 2024

La ricerca è stata realizzata con il cofinanziamento dell'Unione europea - POC Puglia 2014-2020
Asse X - Azione 10.4 "Interventi volti a promuovere la ricerca e per l'istruzione universitaria".
Approvazione Avviso pubblico n. 1/POC/2021 "Dottorati di ricerca in Puglia XXXVII Ciclo"
(CPU-D95F21001800008)



A coloro che sono sempre stati lì.

A coloro che non ci sono più.

E fino alla fine.

*Alla mia famiglia, che non ha mai smesso di
credere in me.*

Abstract

Keywords: Rocking Dynamic, Masonry, Contact Mechanics, Impact mechanics, Dynamic tests.

The protection and preservation of historic masonry buildings in seismically active areas represent one of the most complex and significant challenges in the fields of Engineering and Architecture. Our architectural and archaeological heritage presents specific vulnerabilities that make it highly susceptible to earthquake-induced damage. Therefore, it is necessary to develop appropriate theoretical approaches to study the dynamic behavior of these structures, which allow us to prevent the most common modes of collapse and to design prudent interventions for the conservation and safeguarding of historic monumental buildings.

The approach predominantly used for studying the dynamics of masonry constructions composed of blocks is based on the studies of Housner (1963), that is, on the rocking dynamics of structures composed of rigid blocks. This theoretical approach is employed both for the study of structural elements made of superimposed blocks, such as temple columns, and for the study of curved structures (arches and vaults), structural elements widely present in the historical and architectural heritage including the so-called "minor" heritage found in the historic centers of the Mediterranean.

This doctoral thesis fits into this field of research by formulating a new theoretical and experimental approach to characterize the mechanics of impact in the dynamics of masonry structures.

One of the objectives achieved was to understand the influence that damage incurred at the edges of the blocks during oscillation (rocking) can have on the overall dynamic behavior of the structure as well as on its stability. In particular, the breaking of the edges alters the geometry of the block, generating a dynamic behavior that can significantly diverge from that of an intact block with undamaged edges.

Therefore, first and foremost, a new analytical model was developed by introducing a rounded geometry for the damaged edges of the rigid blocks, described by

new geometric parameters, including the angle ψ , which allows for a more accurate representation of the transition between the rolling phase and the pure oscillation phase of multiblock systems. This approach made it possible to analyze in greater detail the variations in the block's stability and its energy dissipation during rocking motion.

A further important objective achieved was to understand and overcome the limitations of the classical rocking model (Housner's model), also based on experimental evidence, by formulating a new theoretical approach that considers rigid blocks but locally deformable at the interface. Using numerical models developed in the MATLAB environment, the two formulated theoretical approaches were compared with the classical one present in the literature, considering different seismic input scenarios. The numerical simulations adopted a "point-like" representation of the impact, taking into account the mechanical properties of the block materials and the Coefficient of Restitution (CoR), a crucial parameter for describing energy dissipation during impacts.

The formulated theoretical models allowed for an effective study of the block's dynamic response, ensuring an accurate assessment of the influence that the block's geometry and material properties can have on the mechanics of the impact. At the same time, the developed approach serves as a useful reference for developing models that can also consider a continuous distribution of forces at the block's interface.

To support the proposed analytical models and numerical simulations, experimental tests were conducted on reduced-scale specimens, both with non-rounded (straight) edges and with rounded edges, subjected to dynamic stresses induced by a dynamic actuator. These blocks were tested on surfaces of different materials, a choice motivated by the need to investigate the dependence of the dynamic response on the mechanical properties of the materials contrary to what occurs in the classical Housner model, which considers exclusively geometric parameters. The experimental tests provided fundamental data to validate the proposed analytical model, allowing for a detailed study of the effects of structural imperfections, contact conditions, and energy dissipation mechanisms.

The results obtained demonstrated the importance of an accurate representation of the block's geometry and the mechanical properties of the materials involved in the impact, as well as the influence of these factors on the system's dynamic response. The theoretical analyses, numerical simulations, and experimental results allowed for a comprehensive study of the rocking phenomenon of multiblock masonry struc-

turesa phenomenon still to be explored, especially concerning curved structures. The developed theoretical approach is presumed to be extendable to multiblock systems characterized by complex geometries such as arches.

In conclusion, the proposed theoretical and experimental approach aimed to study certain aspects of rocking dynamics that have been partially addressed in the literature: (a) the dynamic behavior of masonry blocks damaged during oscillation (hence the choice to consider blocks with rounded edges); (b) the influence that the mechanical properties of the blocks can have on the overall dynamic behavior of the structural element. In particular, it is emphasized that this latter aspect has not yet been duly studied, as models proposed in the literature refer to the classical Housner approach, which is based on the assumption of block rigidity. Therefore, the study of rocking dynamics currently relies on purely geometric considerations without accounting for the possible deformability of the blocks upon impact, which can completely change the overall dynamic behavior of the structureas has often been observed in real structures.

The results obtained in this thesis aim to highlight how a theoretical modeling that takes into account dissipative effects due to the deformability of the blocks can better capture the aspects of rocking observed experimentally and some phenomena observed in real cases that have not yet been theoretically clarified. A more accurate understanding of the rocking dynamics of masonry constructions is necessary for the wise and effective design of protection and conservation interventions for archaeological and architectural artifacts, in order to safeguard our remarkable historical heritage.

Sommario

Parole chiave: Dinamica Rocking, Muratura, Meccanica del contatto, Meccanica dell'impatto, Prove dinamiche.

La salvaguardia e la tutela delle costruzioni storiche in muratura in aree sismicamente attive rappresenta una delle sfide più complesse e rilevanti nel campo dell'Ingegneria e dell'Architettura. Il nostro patrimonio architettonico e archeologico presenta vulnerabilità specifiche che lo rendono fortemente suscettibile ai danni provocati dai terremoti. Per cui, risulta necessario procedere allo sviluppo di appropriati approcci teorici allo studio del comportamento dinamico di queste strutture che consentano di prevenire le più diffuse modalità di collasso e di progettare sapienti interventi per la conservazione e la salvaguardia dell'edificio storico-monumentale. L'approccio prevalentemente impiegato per lo studio della dinamica delle costruzioni in muratura costituite da blocchi si basa sugli studi di Housner (1963), ovvero sulla dinamica del "rocking" di strutture costituite da blocchi rigidi. Questo approccio teorico è impiegato sia per lo studio di elementi strutturali costituiti da blocchi sovrapposti, come per esempio le colonne dei templi, sia per lo studio delle strutture curve (archi e volte), elementi strutturali molto diffusi nel patrimonio storico e architettonico anche definito "minore" come quello dei centri storici del Mediterraneo.

La presente tesi di dottorato si inserisce in questo ambito di ricerca formulando un nuovo approccio teorico e sperimentale alla caratterizzazione della meccanica dell'impatto nella dinamica di strutture in muratura.

Uno degli obiettivi conseguiti è stato quello di comprendere l'influenza che il danneggiamento conseguito agli spigoli dei blocchi durante l'oscillazione (rocking) possa comportare sul comportamento dinamico complessivo della struttura nonché sulla sua stabilità. In particolare, le rotture degli spigoli alterano la geometria del blocco, generando un comportamento dinamico che può divergere significativamente da quello di un blocco integro ossia con spigoli non danneggiati.

Per cui è stato, in primis, sviluppato un nuovo modello analitico introducendo una geometria raccordata per i bordi danneggiati dei blocchi rigidi descritta da nuovi

parametri geometrici, tra cui l'angolo ψ , che permette di rappresentare in modo più accurato la transizione tra la fase di rotolamento e la fase di oscillazione pura dei sistemi mutiblocco. Questo approccio ha consentito di analizzare con maggior dettaglio le variazioni della stabilità del blocco e la sua dissipazione energetica durante il moto oscillatorio.

Un ulteriore importante obiettivo conseguito è stato quello di comprendere e superare le limitazioni del modello classico del rocking (modello di Housner) anche sulla base delle evidenze sperimentali, formulando un nuovo approccio teorico che considerasse blocchi rigidi ma localmente deformabili all'interfaccia. Mediante modelli numerici sviluppati in ambiente MATLAB sono stati confrontati i due approcci teorici formulati con quello classico presente in Letteratura, considerando diversi scenari di input sismico. Le simulazioni numeriche hanno adottato una rappresentazione "puntuale" dell'impatto, che tenga conto delle proprietà meccaniche dei materiali dei blocchi e del Coefficiente di Restituzione (CoR), parametro cruciale per descrivere la dissipazione di energia durante gli impatti. I modelli teorici formulati hanno consentito di studiare in modo efficace la risposta dinamica del blocco, garantendo un'accurata valutazione dell'influenza che la geometria del blocco e le proprietà del materiale possono avere nella meccanica dell'impatto. Al contempo, l'approccio sviluppato costituisce un utile riferimento per sviluppare modelli che possano anche considerare una distribuzione continua delle forze all'interfaccia del blocco.

A supporto dei modelli analitici proposti e delle simulazioni numeriche, sono state condotte prove sperimentali su provini realizzati in scala ridotta, sia con spigoli non raccordati (retti) sia con spigoli raccordati, sottoposti a sollecitazioni dinamiche indotte da un attuatore dinamico. Questi blocchi sono stati testati su superfici di materiali differenti, una scelta motivata dalla necessità di indagare la dipendenza della risposta dinamica dalle proprietà meccaniche dei materiali, contrariamente a quanto avviene nel modello classico di Housner, che considera esclusivamente parametri geometrici. Le prove sperimentali hanno fornito dati fondamentali per validare il modello analitico proposto, permettendo di studiare in dettaglio gli effetti delle imperfezioni strutturali, delle condizioni di contatto e dei meccanismi di dissipazione dell'energia.

I risultati ottenuti hanno dimostrato l'importanza di una rappresentazione accurata della geometria del blocco e delle proprietà meccaniche dei materiali coinvolti nell'impatto, nonché l'influenza di questi fattori sulla risposta dinamica del sistema. Le analisi teoriche, le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali hanno permesso

di studiare in maniera completa il fenomeno del rocking delle strutture multiblocco in muratura, un fenomeno ancora da studiare soprattutto con riferimento alle strutture curve. L'approccio teorico sviluppato si presume possa essere esteso anche ai sistemi multiblocco caratterizzati da geometrie articolate come gli archi.

Si conclude che l'approccio teorico e sperimentale proposto ha avuto l'obiettivo di studiare alcuni aspetti della dinamica del rocking che in Letteratura sono stati parzialmente affrontati: (a) il comportamento dinamico dei blocchi in muratura danneggiati durante l'oscillazione (da cui la scelta di considerare blocchi con spigoli raccordati); (b) l'influenza che le proprietà meccaniche dei blocchi possano avere sul comportamento dinamico complessivo dell'elemento strutturale. In particolare, si sottolinea che quest'ultimo aspetto non sia stato ancora dovutamente studiato in quanto i modelli proposti in Letteratura fanno riferimento al classico approccio di Housner che si basa sull'ipotesi di rigidità dei blocchi. Per cui, lo studio della dinamica del rocking attualmente si basa su considerazioni puramente geometriche senza tener conto della possibile deformabilità dei blocchi all'impatto che può anche completamente cambiare il comportamento dinamico complessivo della struttura come spesso si è osservato nelle strutture reali.

I risultati ottenuti in questa tesi vogliono evidenziare come una modellazione teorica che tenga conto degli effetti dissipativi dovuti anche alla deformabilità dei blocchi possa cogliere meglio gli aspetti del rocking osservati sperimentalmente e alcune fenomenologie osservate nei casi reali e non ancora chiarite teoricamente.

Una comprensione più accurata della dinamica del rocking delle costruzioni in muratura è necessaria per un progetto sapiente ed efficace degli interventi di tutela e di conservazione dei manufatti archeologici e architettonici, al fine della salvaguardia del nostro notevole patrimonio storico.

Indice

Abstract	i
Sommario	iv
Indice	vii
Elenco dei Simboli	xi
Elenco delle Figure	xiii
Elenco delle Tabelle	xvii
1 INTRODUZIONE	1
1.1 Muratura e comportamento "rocking": Un fenomeno ancora da esplorare	1
1.2 Il concetto di "rocking"	3
1.3 Motivazioni e obiettivi della ricerca	6
1.4 Struttura e approccio metodologico della ricerca	8
2 STATO DELL'ARTE	11
2.1 PANORAMICA DELLA LETTERATURA	11
2.1.1 Modelli teorici ante 1963	11
2.1.2 Il modello teorico di riferimento di Housner (1963)	13
2.1.2.1 Il modello teorico di riferimento di Housner (1963): applicazione	18
2.1.2.2 Risposta all'oscillazione di blocchi rigidi liberi	24
2.1.3 Modelli teorici post 1963	27
2.1.4 Approcci allo studio della dissipazione dell'energia durante l'impatto	32

3	UN NUOVO APPROCCIO TEORICO ALLO STUDIO DELLA DINAMICA DELLE STRUTTURE IN MURATURA: IL ROCKING DEI BLOCCHI RIGIDI A SPIGOLI RACCORDATI	43
3.1	MODELLO TEORICO PROPOSTO	43
3.1.1	Introduzione	44
3.1.2	Oscillatori con spigoli raccordati	44
3.1.3	Analisi comparativa del comportamento dinamico degli oscillatori rigidi raccordati	48
3.1.3.1	Confronto delle storie temporali di risposta	49
3.1.3.2	Confronto degli spettri di risposta relativi al blocco a spigoli raccordati	54
3.1.4	Soglie di risposta dinamica e stabilità strutturale	59
4	UN NUOVO APPROCCIO TEORICO ALLO STUDIO DELLA MECCANICA DELL'IMPATTO NELLA DINAMICA DEL ROCKING DELLE STRUTTURE MULTIBLOCCO IN MURATURA	63
4.1	MODELLO TEORICO PROPOSTO	64
4.1.1	Teoria dell'impatto	64
4.1.2	Il Coefficiente di Restituzione	68
4.1.3	Ripensare all'impatto non più come un "evento istantaneo" nella dinamica rocking	70
4.1.4	Dinamica rocking di blocchi globalmente rigidi ma localmente deformabili all'interfaccia	72
4.1.4.1	Il nuovo modello di contatto non lineare	77
4.1.5	Algoritmo numerico di rilevamento del contatto	86
4.1.6	Influenza dell'impatto sulla risposta dinamica rocking di un blocco rigido	90
5	UN NUOVO APPROCCIO SPERIMENTALE ALLA DINAMICA DEL ROCKING DI STRUTTURE MULTIBLOCCO IN MURATURA	95
5.1	APPROCCIO SPERIMENTALE PROPOSTO	96
5.1.1	Introduzione	96
5.1.1.1	Modelli in scala	98
5.1.1.2	Fattore di scala temporale dei segnali di impulso	99
5.1.2	Setup sperimentale e protocollo di prova	100

5.1.2.1	Sistema di prova dinamico	101
5.1.2.2	Misure accelerometriche	103
5.1.2.3	Sistema DIC di tracciamento della posizione spaziale	103
5.1.3	Setup di prova	106
5.1.4	Modelli in scala	107
5.1.4.1	Provini	107
5.1.4.2	Caratteristiche geometriche	108
5.1.5	Prove preliminari di oscillazione libera	109
5.1.6	Prove di rocking mediante attuatore dinamico	116
5.1.7	Analisi comparativa tra risultati sperimentali e risultati numerici	118
6	CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI	125
6.1	Conclusioni	125
6.2	Lavori futuri	127
	Bibliografia	129
	A Appendice	139
	Supplementi teorici	139
A.1	Equazioni di Eulero-Lagrange	139
A.2	Equazioni del moto	139
B	Appendice	145
	Formulazione del contatto	145
B.1	Modello forza di contatto continua	145
B.1.1	Dettagli di risoluzione dell'equazione integrale per ΔT	145

Elenco dei Simboli

Acronimi

<i>AVL</i>	Analisi di Vibrazione Libera
<i>CoMA</i>	Conservazione del Momento Angolare
<i>CoR</i>	Coefficiente di Restituzione
<i>CR</i>	Centro di Rotazione
<i>DIC</i>	Digital Image Correlation
<i>EAE</i>	Earthquake Archaeological Effects
<i>EqM</i>	Equazione del Moto
<i>PGA</i>	Peak Ground Acceleration
<i>SDoF</i>	Single Degree of Freedom: Sistema ad un grado di libertà
<i>SRM</i>	Solid Rocking Motion

Simboli greci

α	angolo di snellezza
∂	derivata parziale
η	coefficiente di restituzione
μ_s	coefficiente di attrito statico
ν	coefficiente di Poisson
ξ	rapporto di smorzamento viscoso equivalente
ω_p	frequenza di un impulso analitico del terreno
ρ	parametro normalizzato per il raggio di curvatura
τ	tempo adimensionale
ψ	angolo che definisce la geometria del raccordo curvo
Υ	momento dovuto alla forza di gravità
θ	angolo di oscillazione
θ_0	angolo iniziale di oscillazione
$\dot{\theta}$	velocità angolare di oscillazione
$\dot{\theta}_0$	velocità angolare di oscillazione iniziale
$\ddot{\theta}$	accelerazione angolare

Simboli romani

B	semi-lunghezza totale dell'oscillatore
$\bar{B}$	semi-lunghezza della base piana dell'oscillatore
D	energia dissipata dal sistema
E_{tot}	energia totale
F_R	forza di ripristino
G	baricentro
H	semi-altezza dell'oscillatore
I_O	momento di inerzia rispetto al polo O
I_G	inerzia rotazionale dell'oscillatore rispetto al baricentro
L	lagrangiana
M	momento
R	semi-diagonale di un oscillatore
T	energia cinetica
T_P	periodo dell'impulso analitico
T_R	periodo di oscillazione rocking
V	energia potenziale
W	peso dell'oscillatore rigido
a_g	ampiezza dell'accelerazione del suolo
a_p	ampiezza dell'impulso analitico al suolo
b	lunghezza in piano del raccordo curvo
f_x	forza di reazione orizzontale in corrispondenza del centro di rotazione
f_z	forza di reazione verticale in corrispondenza del centro di rotazione
g	accelerazione di gravità
m_G	massa
p	parametro di frequenza rocking
r	raggio del raccordo curvo
t	tempo
t_0	tempo iniziale
u_g	spostamento orizzontale del terreno
u_G	spostamento orizzontale totale del baricentro G
x_G^I	spostamento orizzontale del baricentro G in fase I (rotolamento)
y_G^I	spostamento verticale del baricentro G in fase I (rotolamento)
x_G^{II}	spostamento orizzontale del baricentro G in fase II (rocking)
y_G^{II}	spostamento verticale del baricentro G in fase II (rocking)

Elenco delle Figure

1.1	(a) Schizzo interpretativo della genesi sismica della frattura agli angoli; (b) Offsets e dipping dei tamburi nel Tempio di Hera, Isola di Samos, Grecia	2
1.2	Tempio C di Selinunte	3
2.1	Dinamica rocking di un blocco rigido su una superficie rigida: (a) geometria; (b) moto di oscillazione	13
2.2	Dipendenza del periodo T_R di un blocco rigido dall'ampiezza iniziale θ_0	16
2.3	Risposta alle oscillazioni libere di un blocco rigido ($\tan\alpha = 0.20$, $p = 2.20 [s^{-1}]$) su una superficie rigida quando viene rilasciato da un angolo di inclinazione iniziale di $\theta_0 = 0.15 [\text{rad}]$: (a) storia della risposta all'angolo di inclinazione; (b) distribuzione di energia nel tempo. . . .	18
2.4	Ampiezza di accelerazione per innescare il moto oscillatorio ($g \cdot \tan \alpha$) in una colonna oscillante indipendente, tenendo conto dell'influenza della sua snellezza α	19
2.5	Diagramma momento-rotazione ($M - \theta$) di una colonna rigida	20
2.6	Diagramma di corpo libero per una colonna oscillante libera all'inizio del moto	20
2.7	Confronto della risposta alle oscillazioni libere per due oscillatori rigidi con identica snellezza $\tan \alpha = 0.20$	24
2.8	Spettro di accelerazione di ribaltamento di un blocco rigido libero . .	25
2.9	Proprietà del blocco rigido libero ($p = 1.89 s^{-1}$, $\alpha = 0.245$ e $c_r = 0.91$) soggetto ad un impulso sinusoidale (Eq. 2.25); risposta temporale per livelli di ampiezza 'a', 'b' e 'c'	27
2.10	Schema di un blocco libero che si inclina (A) intorno al CR O secondo il modello di Housner [3] e (B) intorno al CR cinematico migrato (Figure da <i>Kalliontzis et al.</i> (2016) in [43])	35

2.11	Risposta temporale di un blocco rigido libero 1:3, rilasciato con un angolo iniziale: (a) diagramma rotazione-tempo normalizzati; (b) diagramma velocità-tempo normalizzati	40
2.12	Risposta temporale normalizzata di un blocco rigido libero al variare del parametro n	41
3.1	Modello di blocco rigido con spigoli raccordati: (a) Modello geometrico; (b) Dettaglio del raccordo; (c) Fase I: Rotolamento; (d) Fase II: Rocking.	45
3.2	Risposte della storia temporale dell'angolo di oscillazione per i quattro blocchi raccordati a confronto	50
3.3	Ritratto di fase di un blocco rigido oscillante con $\eta = 0.9$; (a) A1: blocco di snellezza $\tan \alpha = 0.25$ e $\rho = 0.17$; (b) A4: blocco di snellezza $\tan \alpha = 0.25$ e $\rho = 0.50$	51
3.4	Confronto tra gli oscillatori: $B1$ vs. $B2^c$: (a) Storie temporale di risposta quando sottoposti ad un impulsi antisimmetrico Ricker; . . .	52
3.5	Confronto dei Ritratti di fase tra blocchi rigidi oscillanti dimensionalmente equivalenti con $\eta = 0.9$; (a) $B1$: blocco secondo il modello di Housner; (b) $B2^c$: blocco con spigoli raccordati e raggio normalizzato $\rho = 0.25$	53
3.6	Contour plots della pressione di contatto relativa al caso di blocco secondo il modello di Housner: il diagramma in falsi colori mostra la variazione del contatto nei 6 istanti considerati, dal rosso (massima pressione di contatto) al blu (assenza di contatto)	53
3.7	Spettri di oscillazione (rotazione massima alla base, θ/α) del blocco a spigoli raccordati oscillante con diversi valori ρ (0, 0.10, 0.15, 0.25, 0.30, 0.45) soggetto ad un impulso sinusoidale	55
3.8	Spettri di oscillazione (rotazione massima alla base, θ/α) del blocco a spigoli raccordati oscillante con diversi valori ρ (0, 0.10, 0.15, 0.25, 0.30, 0.45) soggetto ad un impulso cosenoidale	57
3.9	Spettri di oscillazione (rotazione massima alla base, θ/α) del blocco a spigoli raccordati oscillante con diversi valori ρ e snellezza α , soggetto ad un impulso sinusoidale	58
3.10	Spettri di oscillazione (rotazione massima alla base, θ/α) del blocco a spigoli raccordati oscillante con diversi valori ρ e snellezza α , soggetto ad un impulso cosenoidale	59

3.11	Spettro di oscillazione 3D per un blocco con $\alpha = 0.25$ [rad], $p = 1.68$ $[s^{-1}]$ al variare di $\rho = [0.10, 0.25]$, soggetto ad impulso sinusoidale . .	61
3.12	Spettro di oscillazione 3D per un blocco con $\alpha = 0.25$ [rad], $p = 1.68$ $[s^{-1}]$ al variare di $\rho = [0.10, 0.25]$, soggetto ad impulso cosenoidale . .	61
4.1	(a) Corpi in stato di separazione; (b) corpi in stato di contatto (indentazione δ)	66
4.2	Propagazione della velocità normale per l'impatto di un singolo punto	69
4.3	Rappresentazione dell'impatto diretto unidimensionale tra due blocchi: inizio della fase di compressione; istante di massimo indentazione δ ; termine della fase di restituzione.	73
4.4	Configurazione di un blocco rettangolare piano prima dell'impatto con la sua base e indicazione delle relative dimensioni e distanze dal piano di impatto	75
4.5	Rappresentazione dell'azione normale di contatto tra due corpi	77
4.6	Impatto tra superfici piane modellate dalla nuova legge di contatto: (a) relazione forza di contatto in funzione dell'indentazione δ per differenti velocità iniziali; (b) relazione indentazione/forza in funzione del tempo	82
4.7	(a) Relazione forza-indentazione per il nuovo modelli di forza di contatto per un impatto diretto e per diversi valori del coefficiente di restituzione; (b) Forza di contatto durante il processo di contatto-impatto	83
4.8	Influenza del coefficiente di restituzione η sul comportamento del blocco oscillante: (a) indentazione rispetto al tempo; (b) velocità di indentazione rispetto al tempo; (c) relazione forza di contatto-indentazione	85
4.9	Schema computazionale per determinare l'esatto istante di contatto .	87
4.10	Evoluzione temporale delle forze impulsive durante gli impatti nel moto rocking: è indicato con il colore blu l'impulso di restituzione e con il colore rosso l'impulso di compressione	91
5.1	Sistema di controllo digitale RT3	101
5.2	Confronto tra il segnale di progetto (input) e il segnale rilevato sperimentalmente (Misurato): (a) accelerazione; (b) spostamento	103
5.3	Accelerometro	103

5.4	(a) Sistema di misurazione ARAMIS SRX 3D; (b) Reference points pattern ; (c) Settaggio di calibrazione del sistema di acquisizione immagine	104
5.5	(a) Layout del setup di prova; (b) vista assonometrica del banco di prova	106
5.6	(a) Stampante 3D MakerBot Replicator Z18; (b) Disegni tecnici del modello progettato per la stampa 3D e disegno tecnico aggiuntivo. . .	107
5.7	(a) Foto dei provini per i test sperimentali; (b) Marker videoestensimetrico GoM da 1.5mm per le acquisizioni DIC	109
5.8	Configurazione sperimentale per la prova di oscillazione libera	110
5.9	Variazione del Coefficiente di Restituzione (CoR) in funzione del numero di impatti durante il moto di rocking relativo al provino HB_01_gb. Il grafico a barre rappresenta i valori sperimentali di η misurati per ciascun impatto.	112
5.10	Storia temporale di $ \theta /\alpha$ relativa al provino RB_02_a	113
5.11	(a) Valori di η sperimentali rispetto a quelli teorici di Housner per una prova rappresentativa di oscillazione libera del modello HB_02_a; (b) confronto dei valori di CoR stimati per tutte le prove di rocking con i valori ottenuti da prove sperimentali proposte in letteratura e con il modello teorico di Housner [3].	115
5.12	Setup sperimentale: vista frontale del provino RB_02 su base in cls autoclavato	118
5.13	Rielaborazione tramite software INSPECT Correlate dei dati DIC relativi al provino HB_01_g	120
5.14	Rielaborazione tramite software INSPECT Correlate dei dati DIC relativi al provino HB_02_gb	120
5.15	Confronto tra i vari modelli multiblocco delle storie temporali: (a) provino HB_02_g; (b) provino HB_02_gb; (c) provino HB_03_g (d) provino HB_03_gb	123
5.16	Diagramma a dispersione delle rotazioni massime θ_{max} di ogni test . .	124

Elenco delle Tabelle

2.1	Valutazioni sperimentali dei valori di Coefficiente di Restituzione (CoR) alle interfacce (η_{exp}) per colonne rettangolari libere di oscillare con diversi rapporti (h/b), snellezza (α) e materiali; Rapporto di smorzamento viscoso equivalente (ξ_{imp}) relativo alla sola componente dovuta agli impatti per diversi modelli presenti in letteratura	38
3.1	Dettagli degli oscillatori rigidi raccordati	50
3.2	Dettagli degli oscillatori rigidi dimensionalmente equivalenti	52
5.1	Caratteristiche tecniche del modello FGP FA101	103
5.2	Caratteristiche geometriche dei modelli in scala progettati per i test sperimentali	109
5.3	Confronto tra i valori del CoR teorico (η_H) secondo il modello di Housner e il CoR sperimentale (η_{test})	113
5.4	Elenco delle 15 prove condotte sui provini (HB) classici non raccordati	117
5.5	Elenco delle 15 prove condotte sui provini (RB) con spigoli raccordati	118
5.6	Confronto tra i valori degli spostamenti θ_{max} ottenuti dal modello classico di Housner, dalle prove sperimentali e numericamente dal modello teorico proposto e l'errore percentuale nel caso di provini non raccordati, e tra gli spostamenti θ_{max} nel caso di provini raccordati	121

1 | INTRODUZIONE

1.1. Muratura e comportamento "rocking": Un fenomeno ancora da esplorare

La meccanica delle costruzioni in muratura è un argomento di ricerca abbastanza complesso sia a causa delle caratteristiche intrinseche del materiale muratura (eterogeneità, anisotropia, ecc.) sia a causa del comportamento imprevedibile degli elementi strutturali in muratura (colonne, archi, volte, ecc.) soprattutto se sottoposti a sollecitazioni sismiche. In particolare, gli elementi strutturali in muratura, che possono essere studiati come sistemi multiblocco, ossia costituiti da blocchi sovrapposti e mantenuti in equilibrio principalmente grazie alla gravità e all'attrito, mostrano un comportamento dinamico "unico" quando vengono sottoposti ad azioni sismiche. Spesso i singoli blocchi, connessi da grappe o perni in legno o metallo come nelle colonne dei templi greci o romani, reagiscono alle vibrazioni in modo indipendente, generando una serie di effetti dinamici difficili da prevedere. Uno degli effetti più significativi e visibili è la rottura degli spigoli (o *chipping*), fenomeno che si manifesta prevalentemente sugli angoli dei blocchi. Questo tipo di danneggiamento è causato dal movimento oscillatorio che i blocchi subiscono durante un terremoto. La ripetuta sollecitazione sugli angoli, dovuta agli impatti e all'eventuale scorrimento tra i blocchi, provoca fratture inclinate o pseudo-curvilinee tipicamente disposte a 45° rispetto all'asse. Queste fratture, spesso presenti su lati opposti dello stesso blocco, sono dirette lungo la direzione principale del sisma e costituiscono un'importante traccia del movimento sismico subito dalla struttura.

Gli *Earthquake Archaeological Effects* (EAE), ovvero gli effetti dei terremoti sui siti archeologici, forniscono un'importante chiave di lettura per comprendere la storia sismica delle strutture antiche. Questi sono alcuni degli argomenti di studio dell'archeosismologia. La rottura degli spigoli è un chiaro esempio di EAE: l'analisi delle scheggiature e delle fratture angolari può rivelare preziose informazioni sulla direzione e sull'intensità delle scosse sismiche che il bene archeologico ha subito.

Tali effetti rappresentano quindi un'importante testimonianza della storia del sito archeologico che consente di ricostruire sia i danni dovuti al sisma che gli eventuali interventi strutturali che l'uomo del tempo ha realizzato per preservare il manufatto archeologico.

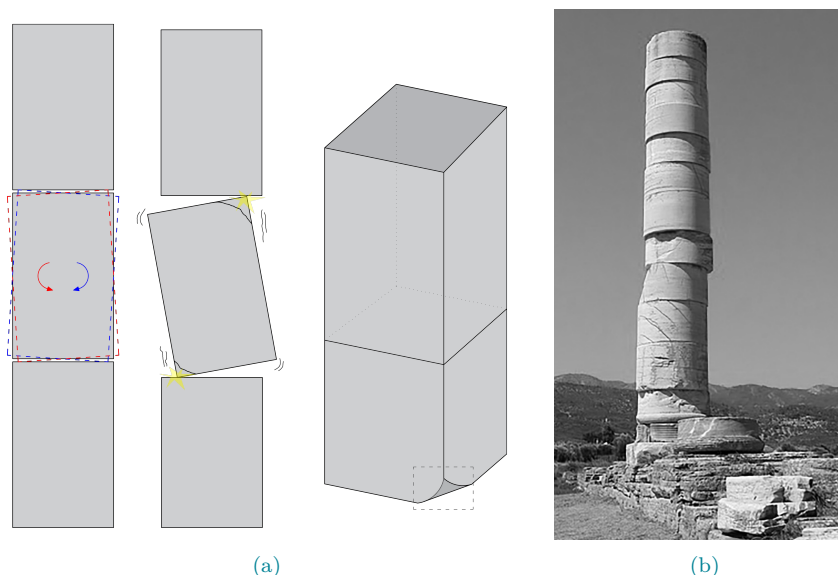


Figura 1.1: (a) Schizzo interpretativo della genesi sismica della frattura agli angoli; (b) Offsets e dipping dei tamburi nel Tempio di Hera, Isola di Samos, Grecia

Si evidenzia che la rottura degli spigoli dei blocchi ha un ruolo rilevante nella dissipazione dell'energia sismica all'interno dei sistemi multiblocco come per esempio le colonne dei templi antichi. Gli impatti tra i tamburi e il conseguente scorrimento dissipano parte dell'energia sismica, riducendo così il rischio di ribaltamento della colonna. Tuttavia, questo meccanismo comporta disallineamenti permanenti tra i blocchi, generando deformazioni visibili che alterano la geometria originaria della struttura. Questo fenomeno, sebbene permetta una dissipazione dell'energia, può compromettere l'integrità del bene dal punto di vista estetico ma anche strutturale, costituendo un'importante sfida per la tutela e la conservazione del manufatto archeologico.

Il movimento oscillatorio delle colonne in muratura non si sviluppa esclusivamente su un piano bidimensionale, ma talvolta è di tipo tridimensionale e coinvolge direzioni multiple quindi anche fuori dal piano. Questo fenomeno, noto come *wobbling*, è caratterizzato da oscillazioni irregolari che provocano dislocazioni casuali tra i blocchi. Studi recenti [1, 2] hanno evidenziato come tali movimenti possano creare nuove dislocazioni o persino correggere disallineamenti preesistenti, suggerendo che una struttura danneggiata può resistere a ulteriori eventi sismici senza collassare.

completamente. Le fratture angolari e gli Earthquake Archaeological Effects (EAE) giocano quindi un ruolo fondamentale nella comprensione del comportamento sismico delle strutture in muratura. Questi danni visibili forniscono non solo indizi sulle sollecitazioni subite durante un terremoto, ma permettono anche di valutare la stabilità residua della struttura. La rottura degli spigoli, in particolare, rappresenta un fenomeno cruciale che necessita di ulteriori indagini, con implicazioni significative sia per lo studio del comportamento dinamico delle strutture antiche sia per le strategie di conservazione e mitigazione del rischio sismico.

1.2. Il concetto di "rocking"

Il "rocking" è un termine che rinvia al concetto di oscillazione di un oggetto, di dondolamento, a seguito di una azione eccitante che può causare il ribaltamento dello stesso. Il movimento oscillatorio, conseguente all'azione di forze orizzontali, dei blocchi di cui sono costituiti gli elementi strutturali e in generale di qualsiasi struttura che può considerarsi anche solo appoggiata ad un piano, ha da sempre catturato l'interesse della comunità scientifica. L'interesse scaturisce dall'osservazione di tale fenomenologia principalmente nei beni archeologici (basti pensare alla colonna di un antico tempio che, a seguito a un impulso sismico, potrebbe oscillare attorno alla propria base), ma anche in generale nei beni architettonici dagli elementi decorativi (per esempio il blocco di pietra in equilibrio instabile su un cornicione, che, dopo una lieve perturbazione, comincia a dondolare avanti e indietro) sino agli elementi strutturali.

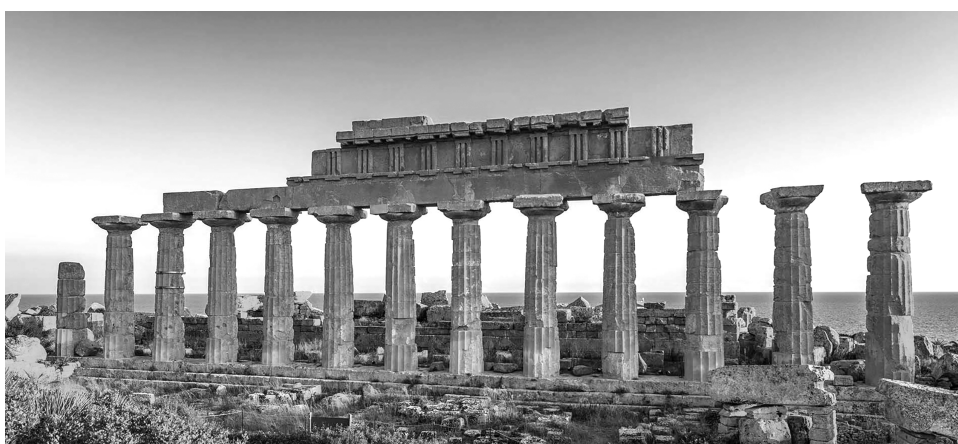


Figura 1.2: Tempio C di Selinunte

Si può fornire un esempio di questo fenomeno osservando i resti dell'antico tempio C di Selinunte, in Sicilia (Figura 1.2), risalente a circa la metà del VI secolo a.C. Le colonne ancora collegate dall'architrave di copertura possono essere rappresentate da un modello a telaio. Al contrario, le colonne non più collegate, si comportano come elementi indipendenti, la cui risposta dinamica è assimilabile a un oscillatore libero.

Questo tipo di moto si verifica spesso in elementi strutturali snelli non vincolati alla base, che, una volta spostati dalla loro configurazione (posizione) di equilibrio, tendono a ruotare attorno a uno dei loro bordi o angoli. Se l'elemento non si ribalta, la forza di gravità lo riporta verso la posizione verticale, ma talvolta la velocità angolare residua può portare al superamento dell'equilibrio, generando un'ulteriore oscillazione. Questo processo continua finché l'energia accumulata non viene dissipata attraverso gli impatti che avvengono durante il passaggio vicino alla posizione verticale, causando infine l'arresto del moto oscillatorio. Questo moto ciclico in piano per un blocco rigido indipendente, verrà quindi indicato nel seguito della dissertazione come "moto rocking" o "moto oscillatorio piano".

Nonostante la familiarità intuitiva di questo tipo di moto, si tratta di un processo non lineare, estremamente complesso e sensibile alle condizioni iniziali. La comprensione approfondita della meccanica che lo governa è cruciale per lo studio di un'ampia gamma di sistemi che presentano fenomeni simili. Negli ultimi anni, numerosi studi sono stati condotti su strutture multiblocco in muratura, utilizzando metodologie che variano dai metodi semplificati a quelli più complessi, utilizzando varie metodologie di analisi: dalle analisi agli elementi finiti (FEM: Finite Element Method) sviluppando modelli di simulazione numerica in campo non lineare, alle analisi di strutture multiblocco con il metodo agli elementi distinti (DEM: Discrete Element Method).

Tuttavia, ad oggi si evidenziano alcune criticità non ancora risolte. Se ne citano quelle affrontate nella seguente tesi di dottorato: (a) la progettazione e lo sviluppo di accurati setup e protocolli di prova che permettessero di analizzare sperimentalmente in maniera completa il comportamento rocking di modelli in scala ridotta dei casi di studio reali; (b) l'incongruenza tra i risultati sperimentali e i risultati numerici ottenuti dai modelli teorici proposti in Letteratura che impiegano l'approccio classico di Housner, ovvero nell'ipotesi di blocchi rigidi e con una geometria integra nonostante la continua oscillazione (blocchi a spigoli retti). Per cui, l'obiettivo principale del presente lavoro di ricerca è stato: sviluppare e perfezionare una stra-

tegia originale per la comprensione del comportamento rocking reale delle strutture multiblocco in muratura mediante un approccio teorico (e numerico) in grado di risolvere le criticità sopra evidenziate e un approccio sperimentale che potesse riprodurre sperimentalmente anche con modelli di scala ridotta sistemi multiblocco dalle geometrie più semplici (colonne) fino a quelle più complesse (triliti e archi).

Ad oggi, la maggior parte degli studi analitici sul comportamento oscillatorio (rocking) delle strutture multiblocco in muratura si basa principalmente su approcci che trattano il problema dell'impatto, spesso utilizzando ipotesi semplificate. Uno degli approcci più comuni è il modello classico di impatto, basato sulla conservazione del momento angolare, formulato originariamente da Housner nel 1963 [3]. Housner sviluppò questa teoria per spiegare l'insolito comportamento di alcune differenti strutture durante un terremoto significativo in California: alcuni serbatoi "a fungo" non collassarono al contrario di altre strutture che si ipotizzavano potessero resistere al sisma. Housner intuì che il comportamento di queste strutture non era governato dal concetto di recupero dello spostamento elastico, ma piuttosto dall'effetto di recupero dovuto alla forza peso della struttura, in una dinamica governata dall'impatto e dal movimento oscillatorio.

A differenza delle strutture elastiche, il cui comportamento dinamico viene generalmente analizzato tramite il concetto di spettro di risposta, che descrive l'amplificazione delle sollecitazioni durante un evento sismico, le strutture che manifestano un comportamento "oscillatorio" presentano una dinamica più complessa, che non può essere ridotta al solo concetto di amplificazione. In queste strutture, il movimento è fortemente influenzato dalla combinazione tra l'ampiezza e il periodo dell'oscillazione, il che può portare a esiti differenti: in alcuni casi, la struttura può ribaltarsi completamente, mentre in altri può continuare a oscillare attorno a una posizione instabile. Per comprendere e prevedere il comportamento post-impatto di queste strutture, si utilizza il Coefficiente di Restituzione (CoR), un parametro fondamentale che quantifica la capacità della struttura di restituire energia dopo un urto. Il CoR fornisce dunque una prospettiva critica per interpretare il comportamento dinamico della struttura e valutare la sua stabilità dopo l'impatto.

Tuttavia, seppur il Coefficiente di Restituzione rappresenti un parametro cruciale al tempo stesso è un dato ampiamente discusso nella soluzione dei problemi di impatto. Esso è fondamentale per descrivere le velocità finali, gli impulsi e l'energia cinetica durante l'impatto tra corpi. La sua semplicità lo rende uno strumento utile per correlare altri parametri e per valutare la dissipazione di energia, ma i risultati

proposti in Letteratura mostrano chiaramente che il CoR dipende dalla geometria e dal materiale dei corpi impattanti, nonché dalla velocità d'impatto iniziale. In particolare, il CoR tende a diminuire con l'aumento della velocità d'impatto e, per la maggior parte dei materiali costituenti i corpi, è significativamente inferiore all'unità, anche a velocità d'impatto molto basse.

Nonostante l'approccio teorico classico, che si fonda su un modello semplice di impatto all'interfaccia tra i blocchi, mostri la validità in molti campi di applicazione, è necessario riconoscere alcuni suoi limiti.

In particolare, nel corso degli anni, sono state condotte diverse prove sperimentali per identificare il Coefficiente di Restituzione in campioni di muratura (non rinforzata), con materiali da costruzione diversi e differenti rapporti di snellezza. Gli studi hanno dimostrato che piccole irregolarità sulle superfici impattanti producono notevoli differenze tra il valore teorico e quello sperimentale del CoR. Inoltre, la scelta del materiale dei blocchi influenza fortemente la dissipazione all'interfaccia tra i blocchi durante il rocking. Al fine di minimizzare le discrepanze tra il CoR sperimentale e quello teorico, sono stati proposti nuovi modelli che tuttavia continuano a basarsi principalmente sugli aspetti geometrici del problema e sullo studio delle forzanti che generano l'impulso.

1.3. Motivazioni e obiettivi della ricerca

La ricerca sviluppata nell'ambito delle attività di dottorato è stata motivata dal crescente interesse da parte della comunità scientifica nei confronti dello studio del comportamento dinamico delle costruzioni in muratura al fine di progettare e realizzare strategici interventi di conservazione e tutela. In particolare, sono stati sviluppati due nuovi approcci teorici per lo studio della dinamica rocking delle strutture multiblocco in muratura.

Il primo modello teorico proposto consente di analizzare l'influenza del danneggiamento degli spigoli dei blocchi nel comportamento dinamico complessivo della struttura. Infatti, gli edifici storici e in particolare i beni archeologici, che tra l'altro hanno superato molti eventi sismici, spesso presentano questa tipologia di difetto. Questi danni, sebbene localizzati, alterano significativamente la geometria del blocco, modificando il suo comportamento oscillatorio (rocking) e aumentando il rischio di collasso sotto sollecitazioni successive. Comprendere queste dinamiche è fondamentale per valutare l'influenza delle modifiche geometriche sulla risposta sismica

complessiva della struttura multiblocco.

In particolare, è stato sviluppato un modello geometrico che approssima il bordo danneggiato con una curva, introducendo nuovi parametri geometrici, come la lunghezza della parte curva e il raggio di raccordo, per descrivere con maggiore precisione la nuova configurazione del blocco. Nella trattazione, questo modello di blocco verrà denominato "a spigoli raccordati" per differenziarlo dal modello classico di Housner che prevede gli spigoli ad angolo retto che verrà denominato "a spigoli non raccordati".

Questa nuova geometria ha sollevato interrogativi sull'influenza delle proprietà meccaniche del materiale e delle condizioni di contatto durante l'impatto nel moto oscillatorio. Su queste considerazioni si basa il secondo modello teorico proposto. La modellazione tradizionale dell'impatto, spesso semplificata come un fenomeno puntuale, non riesce a catturare adeguatamente la complessità del fenomeno se vengono considerati i blocchi con spigoli non danneggiati. Per questo motivo, è stato sviluppato un modello che consente di analizzare le forze di contatto all'interfaccia tra i blocchi e il possibile fenomeno di "indentazione" tra i blocchi durante l'impatto derivante dalla ipotesi di deformabilità degli stessi, diversamente da quanto ipotizzato nel classico modello di Housner. Gli approcci teorici sono stati implementati numericamente al fine di studiare reali casi di studio e poter confrontare i risultati numerici con risultati sperimentali ottenuti da campagne di prove svolte su provini in scala. In particolare, è stato proposto un approccio sperimentale che consentisse di investigare ad ampio spettro il comportamento rocking di blocchi in muratura rispondendo ai due obiettivi proposti. Sono state inizialmente svolte prove di oscillazione libera e in seguito prove di oscillazione forzata, ovvero impiegando un setup abbastanza complesso che comprende un attuatore dinamico, sensori statici e dinamici e l'acquisizione e la rielaborazione delle immagini durante ogni prova mediante tecnologia DIC (*Digital Image Correlation*). Questa tecnica ottica senza contatto consente di registrare il campo di spostamento nel tempo, con il vantaggio di evitare qualsiasi interferenza fisica con l'oggetto testato che potrebbe influenzare la dinamica del sistema.

Quindi sono stati realizzati provini classici "non raccordati" e provini "raccordati" al fine di studiare l'influenza della modifica della geometria del blocco sul comportamento rocking complessivo. Inoltre i provini sono stati appoggiati su basi costituite da materiali differenti e che quindi mostrano differenti rigidità. Questa scelta è stata motivata dal voler validare il secondo modello che si propone di studiare l'in-

fluenza delle proprietà meccaniche dei blocchi all'interfaccia durante l'impatto nella dinamica rocking. A tal proposito, ha assunto un ruolo cruciale l'aggiornamento continuo delle condizioni iniziali e post impatto necessarie per il nuovo modello di impatto proposto. Il CoR, che influisce direttamente sulla dissipazione dell'energia durante l'impatto, è fondamentale per prevedere il comportamento del blocco sotto sollecitazioni sismiche future. Per cui è stato adottato un approccio che dividesse l'impatto in due fasi distinte – compressione e restituzione – per offrire una descrizione più dettagliata e accurata del fenomeno.

In sintesi, il lavoro svolto nell'ambito delle attività di tesi si propone di colmare alcune lacune presenti in Letteratura riguardanti sia la modellazione teorica della dinamica rocking delle strutture in muratura sia la sperimentazione. L'approccio proposto si può estendere anche a geometrie più complesse come gli archi.

1.4. Struttura e approccio metodologico della ricerca

Questa tesi di ricerca è strutturata in capitoli come segue:

Il **Capitolo 1** offre una panoramica del contesto in cui si colloca questo lavoro di ricerca, evidenziando le motivazioni che hanno condotto a scegliere tale tema di ricerca nonché gli obiettivi prefigurati. Infine è descritta in dettaglio la struttura della tesi.

Il **Capitolo 2** descrive sinteticamente lo stato dell'arte con riferimento ai principali approcci presenti in Letteratura.

Nel **Capitolo 3** viene proposto il primo modello teorico sviluppato nell'ambito delle attività di tesi svolte. In particolare viene introdotto un modello innovativo di oscillatore libero con bordi raccordati, sviluppato a partire dall'osservazione delle criticità legate alla risposta sismica delle strutture in muratura.

Per comprendere il comportamento dinamico dell'oscillatore fratturato, sono state derivate le equazioni del moto relative alle fasi di rotolamento e di oscillazione pura, utilizzate successivamente per confrontare la risposta dinamica di questo nuovo modello con il tradizionale modello di Housner, esaminando le variazioni degli spostamenti e delle velocità angolari nel tempo.

Sono stati proposti inoltre risultati numerici ottenuti implementando il nuovo modello in presenza di impulsi analitici. I risultati di questa analisi sono stati presentati in forma di spettro di ribaltamento, fornendo una panoramica dettagliata delle

condizioni di stabilità.

Il **Capitolo 4** presenta il secondo modello teorico proposto. In particolare è stata sviluppata una nuova formulazione analitica per descrivere il contatto durante l'impatto tra i blocchi rigidi nella dinamica rocking delle strutture multiblocco in muratura. Questa nuova formulazione ha lo scopo di superare i limiti dei modelli tradizionali fornendo una descrizione più dettagliata e accurata delle interazioni di contatto durante gli impatti, tenendo conto delle proprietà meccaniche dei materiali e del coefficiente di restituzione (CoR).

Una parte fondamentale del capitolo è costituita dalla discussione del codice numerico sviluppato in ambiente MATLAB, che ha avuto l'obiettivo di risolvere in modo efficace il problema delle forze di contatto, dei tempi di contatto e della dinamica complessiva durante l'impatto tra i blocchi. Il codice numerico consente di simulare l'evoluzione temporale delle forze di contatto durante le fasi di compressione e di restituzione, fornendo un quadro dettagliato dell'interazione tra i blocchi rigidi. Questo strumento è essenziale per l'applicazione della nuova formulazione al problema dinamico rocking delle strutture, permettendo di analizzare come i contatti ripetuti influenzino la risposta globale del sistema durante eventi sismici.

Il **Capitolo 5** descrive la campagna sperimentale condotta nell'ambito di questa tesi. In particolare sono mostrati i risultati ottenuti da prove preliminari di oscillazione libera e prove di oscillazione forzata che hanno comportato lo sviluppo di un apposito setup e protocollo di prova che comprende un attuatore dinamico, sensori statici e dinamici e l'acquisizione e la rielaborazione dei dati di prova mediante tecnologia *DIC* (*Digital Image Correlation*). Le prove sperimentali sono state condotte presso il Laboratorio Ufficiale Prove Materiali "M. Salvati" del Politecnico di Bari. I provini testati si differenziano per le configurazioni geometriche ("spigoli raccordati" e "spigoli non raccordati") nonché per le altezze (i modelli hanno altezze variabili secondo il rapporto H/B , pari a 2, 3 e 4).

In particolare, le prove preliminari di oscillazione libera hanno permesso di calibrare i parametri del sistema calcolati numericamente, come il parametro di frequenza oscillatoria p e il coefficiente di restituzione η . Una volta verificata la correttezza di questi parametri e validato il modello teorico proposto per la risposta alle oscillazioni libere, si è passati alle prove dinamiche con forzante. Gli spostamenti angolari di alcuni selezionati punti di ciascun provino durante il rocking sono stati misurati mediante il sistema DIC. La scelta di impiegare la tecnologia DIC deriva da due ragioni principali: i) il sistema di acquisizione DIC misura direttamente gli

spostamenti, che sono di conseguenza sperimentalmente più affidabili delle velocità e ii) gli istanti di rotazione massima sono catturati con maggiore fedeltà rispetto agli istanti in cui si verificano gli impatti, considerando una frequenza di acquisizione di campionamento costante di 300 Hz per i test di oscillazione libera e una frequenza di acquisizione di campionamento di 200 Hz nel caso di test su attuatore dinamico e le elevate velocità del sistema intorno all'impatto.

Infine i dati raccolti sono stati utilizzati come input per il modello numerico, al fine di validarne il comportamento in presenza di sollecitazioni dinamiche.

Il **Capitolo 6** discute le conclusioni del lavoro di ricerca svolto e offre una panoramica sui possibili sviluppi futuri dell'approccio teorico e sperimentale proposto, con particolare riferimento a strutture multiblocco in muratura caratterizzate da geometrie più complesse come gli archi e le volte.

2 | STATO DELL'ARTE

In questo capitolo, viene presentata una sintetica rassegna della Letteratura sui principali modelli teorici sviluppati per descrivere il comportamento dei corpi rigidi oscillanti. Gli argomenti qui esposti, essenziali per una comprensione approfondita della tematica, verranno ulteriormente sviluppati, modificati e ampliati nei capitoli successivi della tesi.

L'obiettivo è quello di fornire un riassunto essenziale dei più significativi risultati conseguiti e una riflessione critica utile per lo sviluppo degli approcci teorici proposti in seguito nella tesi.

2.1. PANORAMICA DELLA LETTERATURA

2.1.1. Modelli teorici ante 1963

I primi studi sul comportamento *rocking* risalgono al padre della sismologia moderna, Robert Mallet [4], che esplorò la possibilità di stimare le intensità sismiche derivando formulazioni numeriche per la risposta all'oscillazione dei blocchi rigidi. Questo concetto è stato adattato nei lavori pionieristici di Milne e Perry [5–7], dove il principio di conservazione dell'energia è stato utilizzato con l'obiettivo primario di stimare l'accelerazione di picco di un'azione sismica, per proporre formule empiriche per la verifica al ribaltamento di blocchi lapidei e colonne monumentali in aree dove non erano disponibili registrazioni sismografiche (Giappone).

Nel 1881, John Milne pubblicò uno dei primi studi volti a quantificare l'intensità del movimento del suolo attraverso l'analisi del ribaltamento di strutture rettangolari, esaminando specificamente il comportamento di lapidi tradizionali giapponesi, alte 1.5 metri e larghe circa 0.6 metri, nell'ambito delle loro risposte sismiche. Prima di questo approccio, la stima dell'intensità sismica si basava prevalentemente su

percezioni soggettive. Insieme al collega C. D. West, Milne (p. 129) [8] sviluppò un modello teorico secondo cui, se l'accelerazione massima del terreno superava un certo limite definito dall'Equazione (2.1), si verificava il ribaltamento della struttura:

$$f = g \cdot \frac{x}{y}, \quad (2.1)$$

dove f è l'accelerazione massima al suolo, y è l'altezza del centro di massa della colonna poggiata su un piano e x è la sua distanza dal centro di rotazione alla base. Il modello proposto si fondava sull'analisi dell'equilibrio statico di un corpo rettangolare, comparando il momento di ribaltamento generato dall'accelerazione sismica con la coppia stabilizzante gravitazionale che agisce sull'angolo del blocco: un'implicazione chiave del modello è che strutture più esili presentano una maggiore tendenza al ribaltamento. Tuttavia, Milne riconobbe la natura approssimativa di questo metodo, sottolineando che, in assenza di strumentazioni sismiche avanzate, il ribaltamento di corpi rettangolari era comunque un indicatore importante, tra l'altro utilizzato ampiamente per valutare l'intensità dei terremoti fino alla metà del XX secolo.

I lavori di Ikegami e Kishinouye [9, 10] tra il 1946 e il 1950 hanno segnato un avanzamento significativo nella comprensione del comportamento sismico di strutture prismatiche, mettendo in luce le limitazioni del modello proposto originariamente da Milne. Nei loro studi, Ikegami e Kishinouye hanno osservato che le lapidi alte e strette, che secondo il modello di Milne avrebbero dovuto essere più a rischio di ribaltamento durante i terremoti, rimanevano spesso in piedi, mentre le lapidi più basse e larghe, considerate stabili secondo l'Equazione (2.1), si ribaltavano inaspettatamente.

Questa discrepanza è stata attribuita alle dinamiche interazioni tra il movimento oscillatorio delle strutture e il moto del terreno, un fattore che non era stato preso in considerazione nell'analisi di Milne. Il modello di Milne, basato su una forza statica, seppur prediceva efficacemente l'accelerazione di picco necessaria per iniziare un movimento oscillatorio, non permetteva di determinare l'effettivo ribaltamento del blocco. Ikegami e Kishinouye conclusero che la propensione al ribaltamento e al oscillazione di colonne rettangolari dipendeva dalla dimensione assoluta e dai rapporti dimensionali di altezza e larghezza, piuttosto che da un semplice rapporto larghezza/altezza, come suggerito dal modello di Milne.

2.1.2. Il modello teorico di riferimento di Housner (1963)

Se nella sezione precedente si è proceduto a una disamina relativa ad alcune delle fasi iniziali nello studio della dinamica rocking, tuttavia, è comunemente riconosciuto che l'analisi contemporanea della dinamica degli oggetti ed elementi strutturali oscillanti, debba la sua genesi teorica all'influente lavoro di G. W. Housner del 1963 [3]. Questo articolo seminale ha segnato un punto di svolta significativo, stabilendo una nuova direzione per le ricerche future nel campo della dinamica applicata agli oggetti oscillanti.

Il modello non lineare di Housner, presentato nel suo fondamentale articolo, che lui stesso ha definito «*inverted pendulum structure*», rappresenta il punto di partenza cruciale per la nostra analisi. Attraverso l'uso di ipotesi robuste sia per il blocco che per il supporto, Housner ha delineato l'Equazione differenziale del moto di un corpo rigido snello, semplicemente appoggiato su una base rigida, applicando la seconda legge di Newton sul moto angolare e definendone il criterio di ribaltamento. Questo modello, denominato '*Solid Rocking Motion*' (SRM), fornisce una solida struttura concettuale per comprendere il fenomeno in questione.

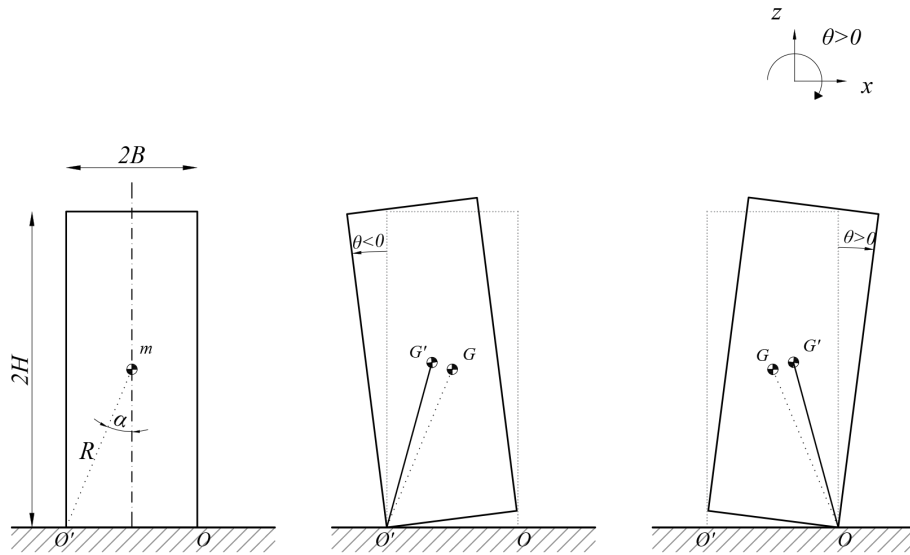


Figura 2.1: Dinamica rocking di un blocco rigido su una superficie rigida: (a) geometria; (b) moto di oscillazione

I lavori che sono stati sviluppati in seguito, hanno integrato o messo in discussione diversi aspetti di questo modello. Nel suo studio, ipotizzando che il moto avvenga nel piano ($\vec{x}$ O $\vec{z}$), Housner [3] affermava che il corpo rigido può oscillare solo attorno

a uno dei due angoli inferiori quando sottoposto a due tipi di eccitazione, ovvero un impulso rettangolare e uno sinusoidale, come illustrato nella Figura 2.1.

Il blocco considerato ha una massa totale m uniformemente distribuita, un'altezza totale di $2H$ e una larghezza totale di $2B$. L'angolo di snellezza e la lunghezza della semidiagonale (parametro di dimensione), sono parametri equivalenti e possono essere calcolati, rispettivamente, da queste dimensioni e viceversa:

$$\alpha = \text{atan}(B/H) \quad (2.2a)$$

$$R = \sqrt{B^2 + H^2} \quad (2.2b)$$

In particolare, l'angolo di snellezza indica il limite di stabilità statica del blocco: se il blocco viene inclinato oltre questo angolo, si ha ribaltamento. La snellezza del blocco è spesso quantificata come $\tan \alpha = B/H$.

È tuttavia necessario evidenziare che il movimento complessivo del blocco è caratterizzato da numerose fasi successive di appoggio; durante una di queste fasi, il punto di contatto tra il blocco e il supporto è considerato fisso rispetto al sistema di riferimento adottato: da un lato, l'aderenza è considerata perfetta e non vi è alcuna velocità relativa lungo la direzione orizzontale; dall'altro, il contatto è considerato permanente (una volta stabilito, il contatto persiste) ed istantaneo (la transizione tra fase di non contatto e fase di contatto avviene istantaneamente), e non vi è alcuna velocità relativa lungo la direzione verticale.

Ispirato dall'osservazione di strutture slanciate e alte quali serbatoi d'acqua sopraelevati e stele funerarie, le quali hanno resistito a terremoti intensi come quello del Cile del 1960 e il sisma di Arvin-Tehachapi del 1952 in California, mentre strutture più basse e pesanti, come i trasformatori elettrici, hanno subito oscillazioni e crolli, Housner ne ha indagato la dinamica di tali strutture, formulando e derivando le equazioni del moto (*EoM*) per sistemi linearizzati, (dove il seno dell'angolo di snellezza, è approssimato ad α , quando $\alpha < 20^\circ$). Il suo studio ha portato alla definizione di soluzioni per i seguenti quattro diversi:

1. Oscillazione libera
2. Accelerazione costante
3. Accelerazione sinusoidale
4. Terremoti

Utilizzando questo schema, Housner ha determinato che il periodo di oscillazione naturale, a differenza degli oscillatori tipici, aumenta con l'angolo di oscillazione. Inoltre, all'aumentare dell'angolo di oscillazione, il periodo si avvicina asintoticamente all'infinito. Anche se fisicamente non realistico, ciò si verifica quando il blocco è perfettamente bilanciato sul suo angolo e non prosegue oltre. Nel suo lavoro, Housner ha quindi studiato impulsi di accelerazione rettangolari e sinusoidali e ha determinato la relazione tra l'accelerazione e la durata dell'impulso che provoca il ribaltamento. Nonostante le numerose ipotesi semplificative (angoli piccoli, blocco sottile, assenza di attrito, assenza di rimbalzi, dissipazione di energia, ecc.), il lavoro di Housner ha costituito - dagli anni '60 ad oggi - il punto di riferimento per lo sviluppo di una molteplicità di studi sulla dinamica rocking dei blocchi oscillanti.

Oscillazione libera

Nel modello, i parametri significativi del blocco sono il suo peso $W = mg$, il momento d'inerzia I_O^1 rispetto al punto O. Inoltre, si consideri il suo centro di massa coincidente con il centro geometrico del blocco, quindi la massa distribuita uniformemente e senza eccentricità. Considerando un elevato coefficiente di attrito μ che impedisce lo scorrimento tra il blocco e la superficie di appoggio, e l'assenza di forze esterne, l'Equazione del moto per l'angolo di inclinazione θ si presenta nel seguente modo, con $\tilde{\alpha} = \text{sgn}(\theta) \cdot \alpha$:

$$I_0 \ddot{\theta} = -WR \sin(\tilde{\alpha} - \theta), \quad (2.3)$$

dove $WR \sin(\tilde{\alpha} - \theta)$ rappresenta il momento stabilizzante. Per cui linearizzando rispetto a θ e α è possibile riscrivere la relazione (2.3) come segue:

$$I_0 \ddot{\theta} - WR\theta = -WR \cdot \tilde{\alpha}, \quad (2.4)$$

Inoltre, con la definizione del parametro di frequenza di un blocco rigido oscillante, definito come:

$$p^2 = \frac{WR}{I_0} = \frac{3g}{4R}, \quad (2.5)$$

l'Equazione (2.4) diventa:

¹L'inerzia polare rispetto ad un asse passante per uno dei due centri di rotazione può essere calcolata applicando il *Teorema di Huygen-Steiner* o teorema degli assi paralleli, che per un rettangolo vale $I_O = 4/3 mR^2$

$$\ddot{\theta} - p^2\theta = -p^2 \cdot \tilde{\alpha} \quad (2.6)$$

per la quale esiste una soluzione esatta. Inoltre, assegnato $\theta_0 > 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ al tempo $t_0 = 0$, la soluzione è la seguente:

$$\theta = \alpha - (\alpha - \theta_0)\cosh(pt) \quad (2.7)$$

Infine si può dimostrare che il tempo che intercorre tra il rilascio del blocco per un assegnato valore di θ_0 e l'impatto del blocco ($\theta = 0$) corrisponde a un quarto del periodo di oscillazione T_R (il tempo necessario per completare un intero ciclo di oscillazione e arrivare nella stessa posizione). Risolvendo l'Equazione (2.7) per $\theta = 0$ si ottiene la seguente correlazione tra l'angolo di inclinazione iniziale $\theta_0 > 0$ e il periodo di oscillazione T_R :

$$T_R = \frac{4}{p} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{1 - \theta_0/\alpha} \right) \quad (2.8)$$

Il valore adimensionale $T_R \cdot p$ è rappresentato in Figura 2.2 in funzione del valore adimensionale θ_0/α , da cui si può notare una forte dipendenza del periodo T_R dall'angolo di inclinazione iniziale θ_0 : quando θ_0/α è prossimo a zero, il periodo di oscillazione è breve; per $\theta_0/\alpha = 1$ il periodo di oscillazione tende all' ∞ , perché il blocco è in equilibrio. Questa interazione tra l'angolo di inclinazione θ e il periodo di oscillazione T_R illustra il comportamento altamente non lineare del blocco oscillante.

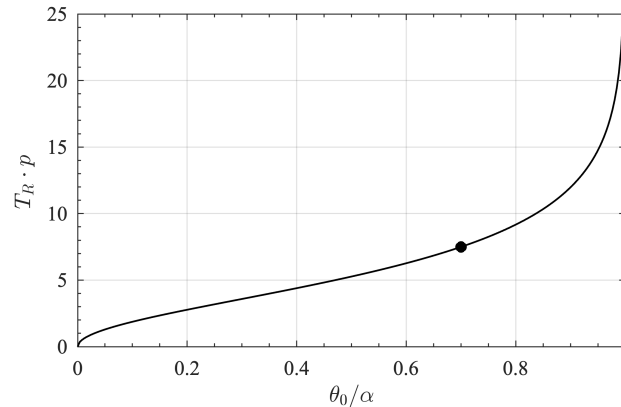


Figura 2.2: Dipendenza del periodo T_R di un blocco rigido dall'ampiezza iniziale θ_0 .

Comportamento rocking dovuto ad un'accelerazione costante

Quando il terreno su cui poggia un blocco è soggetto ad un'accelerazione costante, la forza d'inerzia $W\ddot{u}_g$, applicata orizzontalmente sul baricentro del blocco, può innescare un'oscillazione. Di conseguenza, l'Equazione che descrive il moto, in forma linearizzata, assume la seguente forma:

$$\ddot{\theta} - p^2\theta = p^2 \frac{\ddot{u}_g}{g} - p^2 \cdot \tilde{\alpha} \quad (2.9)$$

Da tale relazione, è stato quindi possibile affermare che, condizione necessaria affinché il blocco si sollevi e inizi il moto oscillatorio è che:

$$\frac{\ddot{u}_g}{g} > \alpha \quad (2.10)$$

Ma nell'ipotesi di $\ddot{u}_g = a_g$ costante, e assumendo che all'istante di tempo $t_0 = 0$ le condizioni iniziali siano $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$, allora la soluzione dell'Equazione (2.9) sarà:

$$\frac{\theta}{\alpha} = \left(\frac{a_g \alpha}{g} - 1 \right) \cosh(pt - 1) \quad (2.11)$$

Per cui, si può così determinare la durata minima $t_{1,min}$ necessaria, affinché un'accelerazione costante di magnitudo a_g induca il ribaltamento di un blocco rigido. Questo si ottiene comparando il lavoro totale eseguito dalla forza d'inerzia $W\ddot{u}_g$ con la variazione di energia potenziale tra le posizioni $\theta_0 = 0$ e $\theta = \alpha$. Di conseguenza, ne deriva la seguente relazione:

$$\cosh(pt_1) = 1 + \frac{1}{2 \frac{a_g}{g\alpha} \left(\frac{a_g}{g\alpha} - 1 \right)} \quad (2.12)$$

Esempio 1: Oscillazione libera

Sia assegnato un blocco rigido ($\tan\alpha = 0.20$, $p = 2.20 [s^{-1}]$), rilasciato con un certo angolo iniziale di inclinazione $\theta_0 = 0.15 [rad]$. Nell'istante di tempo iniziale ($t_0 = 0 [s]$) l'energia cinetica del blocco è zero, così come la sua velocità angolare $\dot{\theta}_0 = 0$. Nella Figura 2.3a viene plottata la risposta temporale di oscillazione per vibrazioni libere, mostrando il verificarsi del primo impatto con la base rigida, all'istante di tempo $t_1 = 0.932 [s]$, che corrisponde ad un periodo $T_R/4$ utilizzando l'Equazione (2.8) o la Figura 2.2, $T_R/4 = 0.93195 [s]$. La velocità angolare pre-impatto $\dot{\theta}^{(-)} = 0.4252 [rad/s]$ da cui segue una velocità angolare post-impatto $\dot{\theta}^{(+)} = \sqrt{0.9406} \cdot \dot{\theta}^{-} = 0.4124 [rad/s]$.

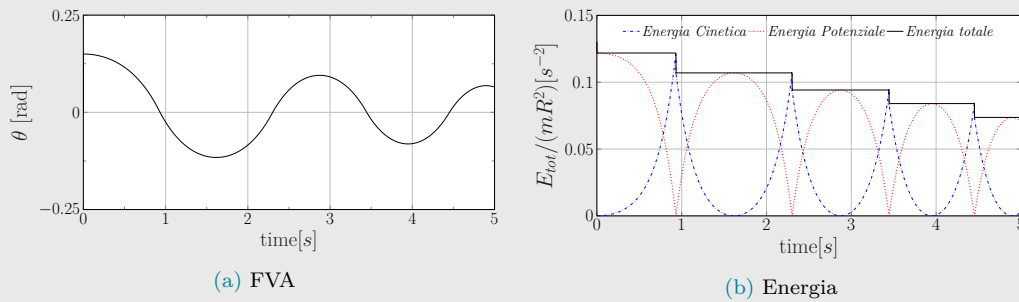


Figura 2.3: Risposta alle oscillazioni libere di un blocco rigido ($\tan\alpha = 0.20$, $p = 2.20 [s^{-1}]$) su una superficie rigida quando viene rilasciato da un angolo di inclinazione iniziale di $\theta_0 = 0.15 [rad]$: (a) storia della risposta all'angolo di inclinazione; (b) distribuzione di energia nel tempo.

2.1.2.1. Il modello teorico di riferimento di Housner (1963): applicazione

Dopo il lavoro pionieristico di Housner, numerosi studi hanno esplorato la complessa risposta dinamica di uno degli elementi strutturali più semplici e maggiormente impiegato dall'uomo dall'antichità sino ad oggi: la colonna. Affinché una colonna libera (ossia semplicemente appoggiata alla base) inizi un moto oscillatorio sotto l'influenza di azioni sismiche orizzontali ($\ddot{u}_{g,x}$) e verticali ($\ddot{u}_{g,z}$), e per evitare altri movimenti indesiderati come lo scorrimento e il sollevamento (ossia la perdita di contatto con la fondazione rigida, conosciuta anche come "rimbalzo" in certi contesti), devono essere soddisfatte specifiche condizioni.

L'avvio del moto di oscillazione in una colonna libera si verifica quando l'elemento osservato inizia a sollevarsi: in letteratura, questo fenomeno è spesso definito come "resistenza" (*strength*). Questo avviene quando il "momento di ribaltamento", calcolato rispetto all'imminente centro di rotazione (CR) O, è bilanciato dal "momento stabilizzante". In altre parole, il moto di oscillazione, noto anche come rocking,

inizia quando il momento di ribaltamento raggiunge un valore tale da eguagliare il momento stabilizzante. Questa condizione di equilibrio dinamico è stata formulata per la prima volta da Milne nel 1885 [7].

$$m\ddot{u}_g h = mgb \iff \ddot{u}_g = g \frac{b}{h} = g \frac{R \sin \alpha}{R \cos \alpha} = g \tan \alpha \quad (2.13)$$

L'Equazione (2.13) evidenzia che la resistenza di una colonna oscillante è strettamente correlata alle variazioni del rapporto di snellezza dell'elemento. Questo effetto è illustrato nella Figura 2.4, dove si può notare che gli elementi con bassa snellezza (colonne tozze) presentano una "resistenza" molto elevata, raggiungendo valori fino a $1g$. Al contrario, gli elementi più snelli mostrano valori di "resistenza" significativamente inferiori.

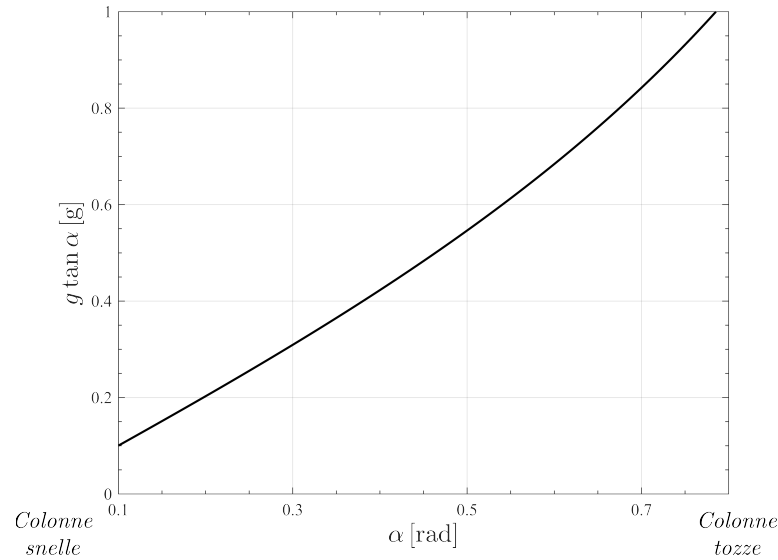


Figura 2.4: Ampiezza di accelerazione per innescare il moto oscillatorio ($g \cdot \tan \alpha$) in una colonna oscillante indipendente, tenendo conto dell'influenza della sua snellezza α

La Figura 2.5 mostra un diagramma ideale momento-rotazione ($M - \theta$) per una colonna libera oscillante, che sintetizza la relazione proposta da Muto et al. (1960) in [11]. Il modello presuppone una rigidità infinita fino a quando il momento applicato non raggiunge il valore di $mgR \sin \alpha$ ("momento stabilizzante" definito nell'Equazione (2.13)). Successivamente, la capacità di ripristino della colonna diminuisce linearmente fino ad annullarsi per $\theta = \alpha$, punto in cui la colonna si ribalta.

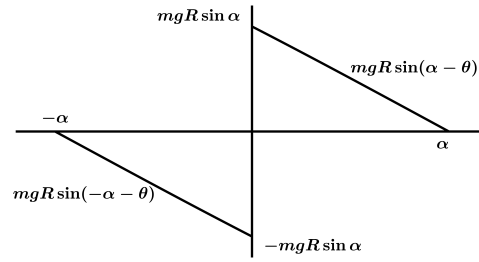


Figura 2.5: Diagramma momento-rotazione ($M - \theta$) di una colonna rigida

La Figura 2.6 illustra invece il diagramma di corpo libero di una singola colonna di dimensioni $2H$ e $2B$, appena prima di entrare in un moto di oscillazione ($\theta = 0$) attorno al centro di rotazione O' . In questo istante, l'equilibrio dinamico è descritto dalle seguenti Equazioni:

$$\sum F_x = 0 \iff f_x = m [\ddot{u}_{g,x} + \ddot{x}] \quad (2.14a)$$

$$\sum F_z = 0 \iff f_z = m [g + \ddot{u}_{g,z} + \ddot{z}] \quad (2.14b)$$

$$\sum M_G = 0 \iff I_G \ddot{\theta} = -f_x h + f_z b, \quad (2.14c)$$

dove f_x e f_z rappresentano, rispettivamente, le forze di reazione orizzontali e verticali in corrispondenza del centro di rotazione O' al momento dell'inizio del sollevamento, con $\ddot{x} = h \cdot \ddot{\theta}$ e $\ddot{z} = -b \cdot \ddot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ derivata tramite le relazioni (2.14).

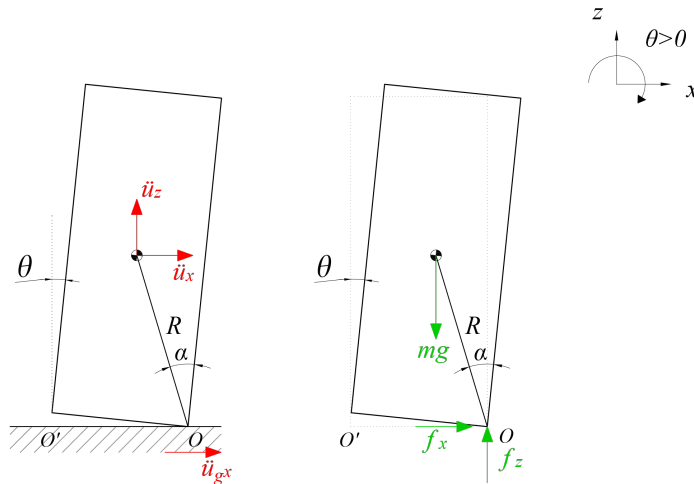


Figura 2.6: Diagramma di corpo libero per una colonna oscillante libera all'inizio del moto

La prima condizione necessaria affinché la colonna inizi a oscillare è che l'accelerazione orizzontale del terreno raggiunga un'ampiezza minima tale che il momento di

ribaltamento attorno a O' superi il momento di ripristino generato dal peso della colonna e dalla forza d'inerzia verticale [12].

$$\underbrace{m\ddot{u}_{g,x}h}_{\text{Momento Ribaltante}} > \underbrace{m[g + \ddot{u}_{g,z}]b}_{\text{Momento Stabilizzante}} \iff \ddot{u}_{g,x} > [g + \ddot{u}_{g,z}] \tan \alpha \quad (2.15)$$

La seconda condizione affinché la colonna non perda il contatto con la base è che la componente verticale del moto del terreno, non sia tale da sollevare completamente la colonna. Questo è garantito se f_z è sempre maggiore di zero in ogni istante ([13, 14]).

La terza ed ultima condizione per l'inizio del moto rocking è che la colonna non scivoli sulla base orizzontale, il che si verifica se:

$$\mu_s \geq \frac{f_x}{f_z} \quad (2.16)$$

con μ_s coefficiente di attrito statico all'interfaccia tra blocco e appoggio rigido. Sostituendo le Equazioni (2.14a) e (2.14b) nell'Equazione (2.16), si ottiene la condizione introdotta da Taniguchi [15] per far sì che una colonna libera entri in moto oscillante senza scivolare (o scorrere):

$$\mu_s \geq \frac{4 \left[1 + \left(\frac{h}{b} \right)^2 \right] \frac{\ddot{u}_{g,x}}{g} + 3 \frac{h}{b} \left[1 + \frac{\ddot{u}_{g,z}}{g} \right]}{1 + 4 \left(\frac{h}{b} \right)^2 + 3 \frac{h}{b} \frac{\ddot{u}_{g,x}}{g} + 4 \left[\left(\frac{h}{b} \right)^2 + 1 \right] \frac{\ddot{u}_{g,z}}{g}} \quad (2.17)$$

In particolare, [16] ha presentato una forma semplificata dell'Equazione (2.17), ottenuta trascurando l'influenza di $\ddot{u}_{g,z}$. Successivamente, [17] hanno adottato questa semplificazione, dimostrando che per colonne snelle (cioè per valori bassi di α) il moto di scorrimento è ridotto, anche con valori elevati di $\ddot{u}_{g,x}$. Lo stesso Housner in [3] ha dimostrato questo risultato, considerando l'Equazione (2.15) per descrivere l'inizio della dinamica rocking dopo aver trascurato l'effetto di $\ddot{u}_{g,z}$ e riducendo così l'Equazione (2.17) alla ben nota espressione per prevenire lo scivolamento all'inizio del moto oscillatorio: $\mu_s \geq b/h = \tan \alpha$.

In base a questi risultati, la maggior parte degli studi sulla dinamica del rocking assume che il valore di μ_s sia sufficientemente grande da impedire lo scorrimento all'inizio del movimento. Una volta soddisfatte queste condizioni, la colonna inizierà a oscillare intorno ai centri di rotazione e, se l'elemento non si ribalta, tornerà alla

posizione di riposo originaria dissipando energia attraverso un impatto sulle interfacce di oscillazione.

Quasi contemporaneamente, [16] e [18] hanno evidenziato l'esistenza di un moto combinato di scorrimento e oscillazione che può manifestarsi dopo l'inizio del moto rocking. Una volta che la colonna entra in movimento, le forze di reazione orizzontali ($f_x(t)$) e verticali ($f_z(t)$) variano nel tempo, il che può indurre uno scivolamento in presenza di specifiche combinazioni di tali valori. Di conseguenza, l'Equazione (2.16) deve essere applicata in ogni istante temporale per prevenire lo scorrimento durante tutto il periodo del moto rocking. Nel 2001 Zhang e Makris in [19] hanno formulato la condizione necessaria affinché una colonna libera eviti il moto combinato di scorrimento e rocking, mostrando che questa modalità dipende non solo dal parametro di snellezza ($\tan \alpha$) e dal coefficiente di attrito statico (μ_s), ma anche dall'intensità dell'accelerazione di base ($\ddot{u}_{g,x}$), mentre l'influenza di $\ddot{u}_{g,z}$ è stata trascurata.

Poco dopo, [15] e [20] hanno incorporato questo effetto, presentando contemporaneamente l'espressione completa per descrivere la condizione necessaria per evitare il moto combinato in una colonna libera oscillante:

$$\mu_s \geq \left| \frac{-\operatorname{sgn}(\theta) \frac{h}{b} \frac{6g}{p^2} \dot{\theta}^2 \sin(a - |\theta|) + [5 - 3 \cos(2a - 2|\theta|)] \ddot{u}_{g,x} + 3 \operatorname{sgn}(\theta) \frac{h}{b} \sin(2a - 2|\theta|) [g + \ddot{u}_{g,z}]}{-\frac{6g}{p^2} \dot{\theta}^2 \cos(a - |\theta|) + 3 \operatorname{sgn}(\theta) \frac{h}{b} \sin(2a - 2|\theta|) \ddot{u}_{g,x} + [5 + 3 \cos(2a - 2|\theta|)] [g + \ddot{u}_{g,z}]} \right| \quad (2.18)$$

Equazione del moto

Utilizzando la simbologia usata per questa tesi, si riesamina la dinamica dell'oscillatore rigido libero che Housner ha affrontato nel suo studio pionieristico [3] introdotto nei paragrafi precedenti. La relazione, presentata nella Sezione A.2, $L = T - V$, che definisce la lagrangiana L come la differenza tra l'energia cinetica T e l'energia potenziale V , viene qui utilizzata per calcolare l'Equazione del moto. In particolare, l'energia cinetica T e l'energia potenziale V sono determinate mediante le seguenti espressioni:

$$T = \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \cdot (x_G^2 + y_G^2), \quad (2.19)$$

$$V = mgR \cdot [\cos(\tilde{\alpha} - \theta) - \cos \alpha] \quad (2.20)$$

Per cui, l'Equazione del moto per θ può essere ottenuta applicando:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2.21)$$

da cui segue:

$$\ddot{\theta} \cdot (mR^2 + I_G) = mR \cdot [-g \sin(\tilde{\alpha} - \theta) - \ddot{u}_g \cos(\tilde{\alpha} - \theta)], \quad (2.22)$$

ovvero

$$\ddot{\theta} = -p^2 \cdot [\sin(\tilde{\alpha} - \theta) + \frac{\ddot{u}_g}{g} \cos(\tilde{\alpha} - \theta)] \quad (2.23)$$

che può essere linearizzata rispetto ad α e θ nella forma seguente:

$$\ddot{\theta} = -p^2 \cdot \left(\tilde{\alpha} - \theta + \frac{\ddot{u}_g}{g} \right) \quad (2.24)$$

Effetti dimensionali

L'effetto dimensionale sugli oscillatori rigidi può essere analizzato attraverso l'Equazione che descrive l'accelerazione dell'angolo di inclinazione $\ddot{\theta}$. Considerando la frequenza naturale di oscillazione di un blocco rigido, si può esaminare come il parametro dimensionale R influisca sulle caratteristiche dinamiche del sistema. L'Equazione (2.5) della frequenza naturale, mostra chiaramente che il parametro dimensionale R appare solo nel denominatore, indicando che la frequenza naturale è inversamente proporzionale alla radice quadrata di R .

Per analizzare l'effetto dimensionale, si considerino due blocchi rigidi di dimensioni diverse ma con la stessa snellezza ($\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2 = 0.20$) e lo stesso angolo di inclinazione iniziale $\theta_0 = 0.75 \cdot \alpha = 0.15$ [rad]. I blocchi sono: B_1 con $R_1 = 2.5$ m e B_2 con $R_2 = 3.5$ m. Utilizzando l'Equazione (2.5) della frequenza naturale per calcolare p per ciascun blocco, si ha che per il blocco B1: $p_{B_1} = \sqrt{3g/10} = 1.715 \text{ s}^{-1}$ e per il blocco B_2 : $p_{B_2} = \sqrt{g/14} = 1.449 \text{ s}^{-1}$.

Le storie temporali di risposta risultanti, utilizzando l'Equazione del moto linearizzata (Equazione (2.24)), sono riportate nella Figura 2.7. Dalle analisi emerge che l'oscillatore 1, con parametro dimensionale R_1 , impatta per la prima volta a $t_1 = 1.204$ s. Al contrario, l'oscillatore più grande 2, con $R_2 = 3.5$ m, impatta per la

prima volta, un po' più tardi, a $t_2 = 1.424$ s. Questo risultato conferma che il blocco più grande ha una frequenza naturale inferiore e quindi un periodo di oscillazione più lungo rispetto al blocco più piccolo.

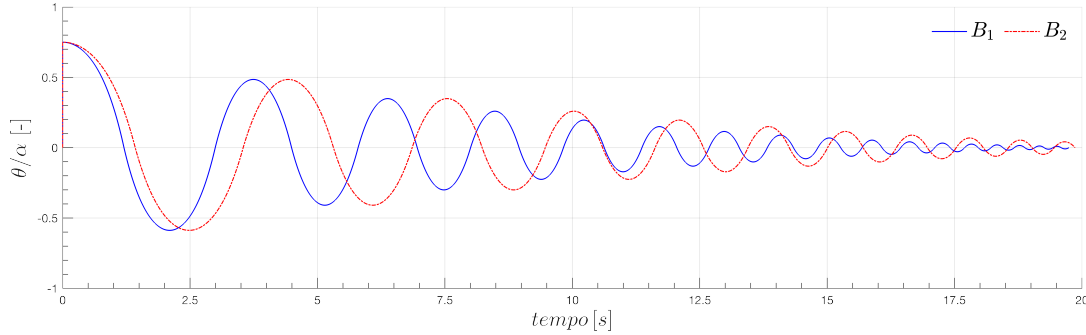


Figura 2.7: Confronto della risposta alle oscillazioni libere per due oscillatori rigidi con identica snellezza $\tan \alpha = 0.20$

Da tale analisi, osserviamo che in primo luogo la frequenza naturale p diminuisce con l'aumento di R . Questo implica che il blocco più grande (B_2) avrà una frequenza naturale inferiore rispetto al blocco più piccolo (B_1) e quindi oscilla più lentamente. In secondo luogo, il periodo di oscillazione T è inversamente proporzionale alla frequenza naturale p , il che significa che T_{B_1} sarà più breve di T_{B_2} . In terzo luogo, i blocchi con dimensioni diverse ma la stessa snellezza mostrano un comportamento dinamico differente. Il blocco più grande tende ad avere un'oscillazione più lenta e un periodo più lungo, il che può essere utile in applicazioni dove una risposta più stabile e meno rapida è desiderata.

2.1.2.2. Risposta all'oscillazione di blocchi rigidi liberi

Nella loro pubblicazione del 2001 "Rocking Response of Free-Standing Blocks under Cycloidal Pulses", Zhang e Makris [19] hanno aggiornato l'approccio di Housner per determinare l'accelerazione minima necessaria per far ribaltare un blocco rigido. Applicando questo metodo a moti del terreno con impulsi cicloidali, hanno sviluppato uno spettro di accelerazione di ribaltamento, che consente di determinare l'ampiezza a_p o la frequenza dell'impulso ω_p necessarie per il ribaltamento di un blocco con dimensioni R e massa distribuita uniformemente. I ricercatori hanno identificato due modalità e quindi due aree distinte di ribaltamento per i blocchi rigidi sottoposti a impulsi cicloidali:

1. ribaltamento con impatto,
2. ribaltamento senza impatto (verso il lato del sollevamento)

$$\ddot{u}_g = \begin{cases} a_p \sin(\omega_p t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_p}, \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.25)$$

La Figura 2.8 illustra lo spettro di accelerazione di ribaltamento per impulsi sinusoidali, descritti dall'Equazione (2.25), con un coefficiente di restituzione η pari a 0.91. La frequenza dell'impulso ω_p è normalizzata rispetto al parametro di frequenza p (Equazione (2.5)), e l'ampiezza dell'impulso è normalizzata rispetto all'accelerazione di sollevamento $\alpha \cdot g$ secondo l'Equazione (2.10). Le due modalità di ribaltamento sono rappresentate in due aree dello spettro: l'area superiore indica il ribaltamento senza impatto, mentre l'area inferiore include i casi in cui il blocco si ribalta con impatto.

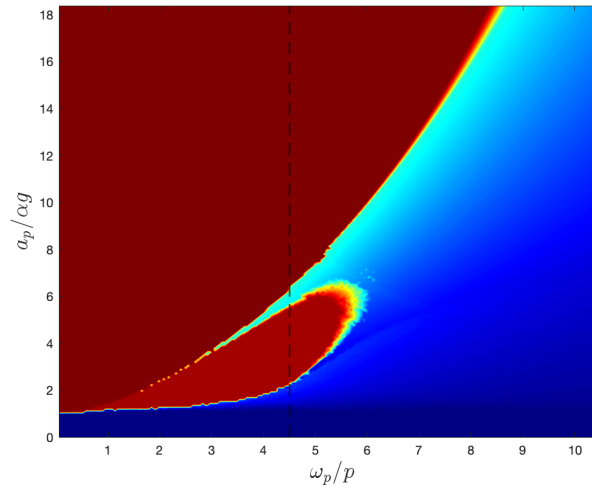


Figura 2.8: Spettro di accelerazione di ribaltamento di un blocco rigido libero

Per dimostrare questo comportamento, si analizzi la risposta di un blocco rigido indipendente utilizzando l'Equazione del Moto (EoM) definita dall'Equazione (2.9). I parametri specifici sono: $p = 1.89 \text{ s}^{-1}$, $\alpha = 0.245$ e $\eta = 0.91$. La risposta viene esaminata per tre diversi livelli di ampiezza mantenendo fisso il valore spettrale di $\omega_p/p = 4.5$. Questo valore corrisponde a una frequenza di impulso sinusoidale di $\omega_p = 8.50 \text{ s}^{-1}$ (equivalente ad un periodo d'impulso $T_p = 0.74 \text{ s}$). Per $a_p = 2.22g$ (caso 'a'), il blocco rimane stabile, mentre per $a_p = 2.23g$ si ha ribaltamento a seguito di un impatto (modalità 1). La Figura 2.9a confronta i tempi di risposta di questi due

scenari, mostrando che l'impatto avviene prima che il passaggio dell'impulso termini ($t_{\text{impatto}} < T_p$). Con l'aumento dell'ampiezza a_p , la risposta diventa analoga fino a quando l'accelerazione raggiunge $a_p = 5.64g$ nel punto 'b'. In questo caso, l'impulso induce inclinazioni maggiori di α , ma riesce a riportare il blocco al di sotto di α prima che l'impulso termini e che il blocco si ribalti ($t_{\text{impatto}} > T_p$). Per $a_p = 5.65g$, il blocco non si ribalta più perché l'angolo di inclinazione iniziale è talmente grande che il blocco riesce a stabilizzarsi, inclinandosi dal lato opposto dopo l'impatto, come mostrato nella Figura 2.9b. Questo effetto prevale fino ad $a_p = 6.41g$ nel punto 'c', dove l'ampiezza dell'impulso diventa troppo elevata per permettere al blocco di recuperare l'equilibrio sul lato di sollevamento. La Figura 2.9c evidenzia che, al termine dell'impulso, l'angolo di inclinazione non riesce più a raggiungere una condizione stabile ($\theta \leq \alpha$), portando al ribaltamento senza condizione di impatto.

È dunque fondamentale comprendere come la risposta di un blocco rigido libero eccitato da un impulso possa variare significativamente in base alla forma dell'impulso stesso. Il comportamento dinamico del blocco si caratterizza principalmente in base ai seguenti due aspetti: il numero di modi di ribaltamento e il numero di tipi di risposta. In particolare, la risposta del blocco sopra analizzato, può essere suddivisa in quattro tipi diversi:

1. $\frac{a_p}{\alpha g} \in [0, 2.22]$
2. $\frac{a_p}{\alpha g} \in [2.23, 5.64]$: modo 1 (ribaltamento con impatto)
3. $\frac{a_p}{\alpha g} \in [5.65, 6.41]$
4. $\frac{a_p}{\alpha g} \in [6.4, \infty]$: modo 2 (ribaltamento senza impatto)

Quando si considerano impulsi di eccitazione reali che differiscono da quelli normalmente analizzati nei modelli e implementati negli esperimenti, la complessità del comportamento del blocco rigido aumenta. Si può affermare che impulsi di eccitazione reali possono introdurre più di due modi di ribaltamento. Ad esempio, oltre ai ribaltamenti considerati nei modelli teorici tradizionali (ovvero ribaltamenti nel piano), potrebbero emergere movimenti più complessi come oscillazioni fuori dal piano o combinazioni di più movimenti contemporanei come osservato nei casi reali. Analogamente, i tipi di risposta possono superare i quattro noti, introducendo dinamiche di risposta non previste. Questo può includere risposte dove il blocco esibisce oscillazioni multiple prima del ribaltamento definitivo, o movimenti irregolari e imprevedibili che non seguono schemi lineari. La variabilità introdotta dalla

forma dell'impulso di eccitazione rende quindi essenziale un'analisi approfondita e specifica per ogni possibile impulso al quale il blocco potrebbe essere sottoposto. In pratica, ciò significa che è necessario (opportuno) considerare una gamma più ampia di scenari di eccitazione quando si progettano strutture per garantire la loro stabilità e sicurezza.

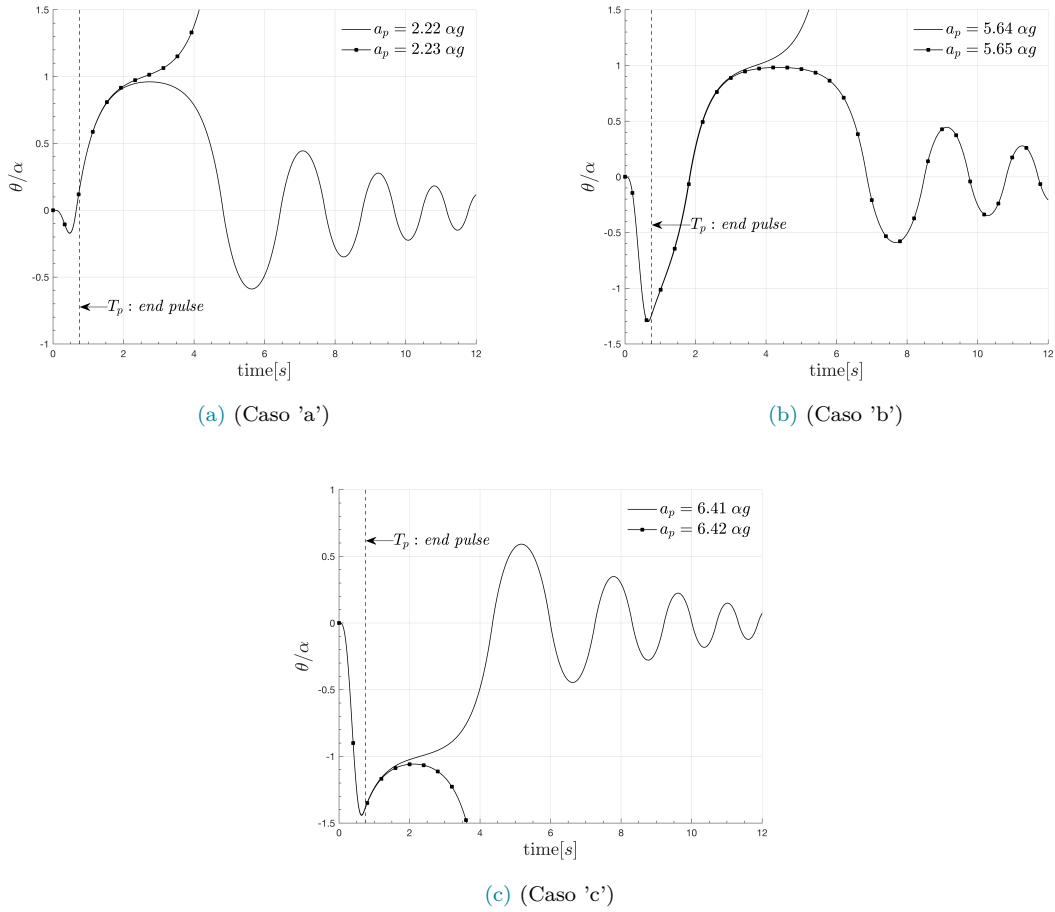


Figura 2.9: Proprietà del blocco rigido libero ($p = 1.89 \text{ s}^{-1}$, $\alpha = 0.245$ e $c_r = 0.91$) soggetto ad un impulso sinusoidale (Eq. 2.25); risposta temporale per livelli di ampiezza 'a', 'b' e 'c'

2.1.3. Modelli teorici post 1963

Dopo la pubblicazione di Housner, l'interesse per il comportamento rocking delle strutture in muratura è cresciuto significativamente diventando oggetto di studi sempre più approfonditi.

Aslam *et al.* (1978) [21] hanno analizzato la natura del problema, attraverso prove sperimentali e analisi numeriche, che hanno permesso di simulare e osservare

le risposte del corpo rigido sottoposto a sollecitazioni sismiche e a impulsi singoli. I risultati ottenuti hanno evidenziato la notevole non linearità del fenomeno. Inoltre, si è osservata un'alta sensibilità del sistema a piccole variazioni nelle condizioni al contorno, ad esempio, minime differenze nella geometria della base del corpo o nel coefficiente di restituzione, che possono alterare drasticamente il comportamento di ribaltamento.

Yim *et al.* (1980) [12] sono stati pionieri nell'uso di una tecnica probabilistica per simulare il comportamento di un blocco rigido. I ricercatori hanno sviluppato una procedura numerica, attraverso un approccio probabilistico, per risolverne il comportamento dinamico del blocco sollecitato da azioni orizzontali e verticali alla base. I risultati numerici ottenuti hanno suggerito che la risposta del blocco è altamente sensibile a piccole variazioni delle sue dimensioni e del rapporto di snellezza, nonché alle caratteristiche del movimento del terreno.

Ishiyama (1982) [13] analizzò e studiò teoricamente il moto di un corpo rigido soggetto ad eccitazione sismica, classificando sei tipologie di movimento (riposo, scorrimento, rotazione, rotazione/scorrimento, salto nella traslazione e salto rotazionale), indagando la transizione tra le diverse tipologie di movimento. Studiò le condizioni che determinano il ribaltamento di un blocco rigido, con simulazioni soggette ad input sinusoidali con o senza componente verticale, variandone gradualmente la frequenza, concludendo che i criteri di ribaltamento dipendono strettamente dalla velocità di picco al suolo.

Spanos e Koh (1984) [22] hanno studiato la risposta all'oscillazione di un blocco rigido su un piano rigido sottoposto ad un'accelerazione sinusoidale orizzontale in regime stazionario, di ampiezza A e frequenza adimensionale. Nel loro articolo, hanno determinato la soluzione dell'Equazione del moto con condizioni iniziali per vari valori di A e Ω , individuando le varie modalità esibite dalla risposta del sistema. Infine, oltre ad identificare le regioni definite come sicure e non sicure, rilevando che queste regioni cambiano in modo significativo al variare del coefficiente di restituzione, hanno sviluppato metodi analitici per determinare i modi fondamentali e sub-armonici per l'analisi di stabilità.

Il lavoro di ricerca, è stato poi esteso ed ampliato da Hogan (1989) [23], che ha meglio chiarito la struttura matematica del problema, introducendo i concetti di stabilità orbitale e di sezione di Poincaré, dimostrando che esiste un valore minimo dell'ampiezza della forzante, dipendente dalla frequenza, al di sotto della quale cessa il moto asintotico del blocco.

Tso e Wong (1989) [24, 25] hanno presentato nei loro lavori di ricerca, i risultati di uno studio teorico e sperimentale per la risposta rocking di blocchi rigidi sottoposti a un movimento sinusoidale orizzontale, osservando che per una specifica ampiezza e frequenza di eccitazione, il blocco rigido può rispondere in vari modi. Sulla base dell'analisi, hanno mappato nello spazio dei parametri ampiezza-frequenza dell'eccitazione, le regioni di diverse classi di soluzioni di risposta simmetriche allo stato stazionario, evidenziando che l'ampiezza costante della risposta all'oscillazione è in qualche modo indifferente al coefficiente di restituzione del sistema, ma è estremamente sensibile alle dimensioni del blocco e alla frequenza.

Shenton e Jones (1991) in [26] hanno presentato una formulazione migliorata, con presupposti simili ai lavori precedenti, in cui si dimostra che la stabilità di un corpo rigido libero, dipende non solo dall'accelerazione alla base, dal rapporto di snellezza, dal peso e dalla distribuzione della massa del corpo, ma anche dalle proprietà delle superfici di contatto, cioè dal coefficiente di attrito.

Lin e Yim (1996) in [27] hanno apportato una svolta importante nello studio dei sistemi oscillanti, sull'identificazione di un comportamento caotico del blocco oscillante libero. La loro scoperta ha dimostrato che non è semplice prevedere con precisione il comportamento di un sistema rocking e che qualsiasi progresso significativo deve quindi basarsi su analisi stocastiche o probabilistiche.

Nello studio condotto in [28], Anooshehpour, Shi *et al.* (1999) hanno cercato di costruire gli spettri della accelerazione minima di ribaltamento dovuta a un impulso mono-sinusoidale con una determinata frequenza circolare ($\omega_p = 2\pi/T_p$) in grado di ribaltare una colonna oscillante con una determinata snellezza (α) e un parametro di frequenza (p).

La ricerca di Shi, Anooshehpour *et al.* (1996) [29], ha segnato un punto di svolta nella comprensione del ribaltamento di blocchi oscillanti sotto l'effetto di impulsi sismici. Il loro studio si è concentrato sull'identificazione delle condizioni precise per il ribaltamento, concludendo che l'energia cinetica del blocco all'istante critico del ribaltamento deve essere zero. Questo significa che il blocco, pur essendo sollevato dall'impulso, non possiede energia residua per continuare il movimento oltre il punto di ribaltamento.

Makris e Roussos (2000) in [30] presentano la risposta transitoria all'oscillazione di un blocco rigido sottoposto a impulsi trigonometrici e a moti del terreno in prossimità della sorgente. In particolare, viene evidenziata l'imprecisione della soluzione presentata da [3] per l'ampiezza minima dell'accelerazione di un semi-impulso

sinusoidale, necessaria per il ribaltamento del blocco. Gli Autori hanno quindi dimostrato che, sotto un impulso semi-sinusoidale, un blocco si ribalta durante il regime di oscillazioni libere e non nell'istante in cui l'impulso termina. Inoltre, il blocco non si ribalta finché la velocità angolare non scende in maniera monotona, raggiunge lo zero, per poi risalire quando il blocco torna in posizione di equilibrio durante la fase di oscillazione libera che segue immediatamente il regime di vibrazione forzata.

Zhang e Makris (2001) in [19] hanno esaminato in modo approfondito la risposta di un blocco rigido sottoposto a impulsi trigonometrici fisicamente possibili, stabilendo che il blocco può rovesciarsi secondo uno dei due modi, a seconda degli impulsi cicloidali cui è sottoposto: subendo uno o più urti, o non subendo alcun urto. La presenza del secondo modo, in particolare, stabilisce una regione di sicurezza che si trova al di sopra dello spettro minimo dell'accelerazione di ribaltamento, la cui forma dipende dal coefficiente di restituzione ed è sensibile alla non linearità del problema. In questo modo, si stabilisce che l'inerzia rotazionale generata da questi impulsi è la forza trainante del collasso, piuttosto che la risposta armonica agli spettri di frequenza.

DeJong (2012) [31] ha confermato che le strutture oscillanti non hanno una frequenza naturale fissa e non possono essere indotte a risuonare ad un'unica frequenza e soprattutto che la risposta dei corpi rigidi sottoposti a un'accelerazione sismica è un problema dipendente dal tempo. La risposta delle strutture rigide a blocco oscillante sottoposte a movimenti armonici a frequenza costante è in qualche modo irrilevante quando si cerca di determinare il caso estremo di risposta ad un evento sismico. E' quindi impossibile prevedere l'esatta risposta di un blocco oscillante ad un possibile terremoto che è essenzialmente un insieme di impulsi consecutivi con caratteristiche estremamente diverse. Tuttavia ciò che è chiaro da queste analisi è che una previsione accurata degli impulsi sismici primari è fondamentale per prevedere efficacemente il collasso per oscillazione.

Dimitrakopoulos e DeJong (2012) [32] hanno sviluppato una soluzione innovativa in forma chiusa per determinare il ribaltamento di un corpo rigido oscillante snello, utilizzando un metodo originale che si basa sulla linearizzazione delle equazioni del moto, per un movimento del terreno caratterizzato da un impulso sinusoidale di durata finita. Gli Autori hanno sviluppato un modello che, oltre ai gruppi adimensionali secondo il teorema di Buckingham, consente di rendere la risposta oscillatoria indipendente dalla direzione delle forze. Dai risultati ottenuti, gli Autori hanno ottenuto che la risposta dell'Equazione del moto linearizzata è direttamen-

te determinabile per blocchi sottili e deve essere scalata solo dall'intensità e dalla frequenza dell'eccitazione. Ciò consente di creare spettri di ribaltamento senza numerose analisi.

Kounadis (2013) in [33] esplora dettagliatamente l'instabilità da ribaltamento di un blocco rigido rettangolare sottoposto ad un impulso armonico del terreno. Lo studio si concentra sull'ampiezza minima dell'accelerazione del terreno che causa l'instabilità del ribaltamento. Viene analizzato l'effetto del rapporto altezza/larghezza del blocco, le sue condizioni iniziali (imperfezioni) e l'altezza del blocco stesso. Due modalità di instabilità del ribaltamento (con e senza impatto) sono discusse, utilizzando ritratti di fasi per valutare i criteri di instabilità del ribaltamento. Vengono confrontate soluzioni lineari e soluzioni non lineari per diverse condizioni iniziali e per diversi parametri del blocco.

DeJong e Dimitrakopoulos (2014) in [34] hanno introdotto una metodologia per determinare l'equivalenza dinamica tra un singolo blocco oscillante e strutture più complesse. Questa equivalenza è cruciale per valutare strutture esistenti vulnerabili al ribaltamento e per progettare adeguati sistemi di isolamento sismico. Lo studio inizia esaminando strutture che hanno un'equivalenza dinamica esatta con un singolo blocco oscillante e poi estende il concetto a sistemi multiblocco attraverso la linearizzazione delle equazioni del moto. Il metodo utilizza le equazioni di Lagrange e considera le accelerazioni centripete e di Coriolis. Vengono trattate tre tipologie di strutture: meccanismi a singolo blocco, a due blocchi, a tre e più blocchi. La metodologia consente di prevedere la risposta oscillante a impulsi sismici, migliorando le previsioni probabilistiche e deterministiche di ribaltamento. Inoltre viene quantificato l'errore di approssimazione associato alla linearizzazione delle equazioni, proponendo una seconda definizione del parametro di scala per strutture non snelle ed evidenziando che, per configurazioni critiche, l'approssimazione può essere accettabile dati gli errori associati alla previsione dei movimenti del terreno. Infine, il documento sottolinea che le strutture oscillanti multiblocco possono essere modelate come sistemi a un grado di libertà solo quando i loro meccanismi generano una "rigidezza negativa" caratteristica del comportamento oscillante.

Lagomarsino (2015) in [35] esplora la valutazione sismica delle strutture in muratura soggette a ribaltamento. In particolare, il lavoro confronta vari modelli e misure di intensità per determinare la sensibilità del comportamento delle strutture al moto sismico, proponendo un approccio basato sullo spostamento, attraverso un'analisi incrementale dei blocchi rigidi, per valutare differenti strutture, come rovine archeo-

logiche, obelischi, colonne e strutture ad arco. Il lavoro discute l'instabilità dinamica dei blocchi rigidi e la validità dei modelli di analisi limite per prevedere il comportamento sismico, evidenziando come la risposta sismica delle strutture oscillanti in muratura dipenda dalla geometria e dalle proprietà dei materiali, con un'enfasi particolare sulle strutture snelle e sui meccanismi di ribaltamento. Vengono analizzati anche i meccanismi complessi, come quelli a più blocchi, e le connessioni elasto-plastiche che influenzano il comportamento sismico.

Dimitrakopoulos e Fung (2016) in [36] hanno presentato soluzioni sia precise che approssimate per calcolare i tempi di collisione. Le analisi effettuate hanno rivelato che, nella maggior parte dei casi, il ribaltamento avviene dopo una o più collisioni, al termine dell'impulso.

Casapulla e Maione (2017) in [37] affrontano le condizioni di risonanza sull'oscillazione di grandi e molto snelli blocchi rigidi durante la fase intensa di un terremoto, proponendo un approccio semplificato per valutare i livelli di sicurezza della risposta sismica. Gli Autori evidenziano la complessità del comportamento dinamico di questi blocchi, sensibile a piccole variazioni nei parametri del sistema e nei dettagli del movimento del suolo. Uno degli aspetti innovativi è l'uso di un accelerogramma artificiale, costituito da sequenze di impulsi istantanei, per rappresentare gli effetti più sfavorevoli della fase intensa di un terremoto. Inoltre, viene introdotta una sequenza secondaria di impulsi intermedi per ridurre gli effetti di risonanza e coprire una vasta gamma di condizioni. La ricerca, quindi, sottolinea come la risposta dinamica sia altamente non lineare e sensibile alle variazioni nei parametri del sistema e nei dettagli del moto del suolo; gli impulsi principali applicati subito dopo l'impatto dei blocchi con il terreno definiscono la condizione di risonanza, mentre gli impulsi intermedi contribuiscono a stabilizzare il movimento.

2.1.4. Approcci allo studio della dissipazione dell'energia durante l'impatto

Quando una colonna è posizionata su una base rigida, come mostrato nella Figura 2.6, e inizia a oscillare senza ribaltarsi, l'Equazione (2.9) descrive la variazione del suo angolo di rotazione θ . La relazione tra momento e rotazione durante questa oscillazione segue la curva illustrata in Figura 2.5, che non racchiude nessuna area, ma indica che l'energia viene dissipata solo durante gli impatti alle estremità dell'o-

scillazione (quando $\theta = 0$). Diversi studi hanno proposto vari metodi per modellare questi impatti (vedi [38–40]), ma il modello più diffuso è quello di Housner (1963) [3]. Questo modello introduce il Coefficiente di Restituzione (CoR) η , sempre inferiore a uno, per rappresentare l'attenuazione del moto causata dagli impatti anelastici. Il CoR è definito come il rapporto tra l'energia cinetica subito dopo e subito prima dell'impatto,

$$\eta^2 = \frac{\frac{1}{2}I_O \left(\dot{\theta}^{(+)}\right)^2}{\frac{1}{2}I_O \left(\dot{\theta}^{(-)}\right)^2} = \left[\frac{\dot{\theta}^{(+)}}{\dot{\theta}^{(-)}}\right]^2 \iff \eta = \left|\frac{\dot{\theta}^{(+)}}{\dot{\theta}^{(-)}}\right| < 1, \quad (2.26)$$

dove $\dot{\theta}^{(-)}$ e $\dot{\theta}^{(+)}$ sono le velocità angolari della colonna rispettivamente un istante prima e un istante dopo l'impatto. Di conseguenza, la quantità di energia persa durante l'impatto è data da $1 - \eta^2$. Un valore più basso di η indica una maggiore perdita di energia. Questo è stato confermato sperimentalmente da Aslam et al. (1980) in [21], i quali hanno dimostrato che colonne con una superficie di contatto maggiore e altezza costante (che portano a valori di η più bassi) resistono meglio al ribaltamento rispetto a colonne con una superficie di contatto minore.

A differenza dell'energia cinetica del blocco, che non si conserva dopo ogni impatto alle interfacce di oscillazione, Housner ha postulato che il momento angolare si conservi. Questa ipotesi si basa sul presupposto di un cambiamento lineare della rotazione, privo di rimbalzi o scorrimenti, il che è valido per colonne snelle e per alti valori di coefficiente di attrito statico, μ_s (in [41]). Pertanto, assumendo che il centro di rotazione (CR) si sposti da O a O' (cfr. Figura 2.6), il momento angolare intorno a O immediatamente prima e dopo l'impatto si conserva; un blocco con una velocità dell'angolo di inclinazione pre-impatto di $\dot{\theta}^{(-)}$ presenta una velocità di inclinazione post-impatto pari a $\dot{\theta}^{(+)} = \sqrt{\eta} \cdot \dot{\theta}^{(-)}$. A ogni impatto viene quindi dissipato ΔE :

$$\Delta E = (1 - \sqrt{\eta}) \cdot T \quad (2.27)$$

Questo implica che ogni semi-ciclo che segue un impatto ha un periodo leggermente inferiore a quello che lo precede, il che è in relazione con la Figura 2.2. Di conseguenza il momento angolare intorno a O' rispetto all'asse y prima dell'impatto $\mathbf{L}^{(-)}$ e dopo l'impatto $\mathbf{L}^{(+)}$, sono così definiti:

$$\mathbf{L}^{(-)} = \dot{\theta}^{(-)} \cdot (I_O - 2mR^2 \sin^2 \alpha), \quad (2.28)$$

$$\mathbf{L}^{(+)} = \dot{\theta}^{(+)} I_O \quad (2.29)$$

Poiché la conservazione del momento angolare (CoMA) presuppone che $\mathbf{L}^{(-)} = \mathbf{L}^{(+)}$, il che porta alla seguente espressione per la determinazione del coefficiente di restituzione:

$$\left[I_O - 2mR^2 \sin^2 \alpha \right] \dot{\theta}^{(-)} = I_O \dot{\theta}^{(+)} \quad (2.30)$$

L'Equazione di cui sopra è derivata assumendo che le forze d'urto siano applicate esattamente all'imminente CR, come mostrato nella Figura 2.10A. Sostituendo l'Equazione (2.30) nell'Equazione (2.26) si ottiene l'espressione per η presentata per la prima volta da Housner in [3]

$$\eta = 1 - \frac{2mR^2}{I_O} \sin^2 \alpha, \quad (2.31)$$

L'Equazione (2.31) si semplifica in $\eta = 1 - (3/2) \sin^2 \alpha$ per colonne rettangolari. Questa Equazione indica che ogni impatto alle interfacce è rappresentato da un valore costante di η , cosa che non avviene nelle strutture reali, ma per le quali si registra un valore sempre variabile. Tuttavia, analisi numeriche hanno mostrato che blocchi oscillanti liberi (e triliti) con diverse snellezze possono presentare significative discrepanze nei valori del CoR ad ogni impatto. Nonostante ciò, il valore medio del coefficiente di restituzione (CoR) è simile a quello determinato analiticamente da Housner (1963), specialmente per elementi snelli. Questo risultato è stato confermato numericamente anche da Ceh et al. (2018) in [42], i quali hanno dimostrato che la stabilità al ribaltamento di una colonna oscillante non è influenzata dalle variazioni del valore di η ad ogni impatto all'interfaccia.

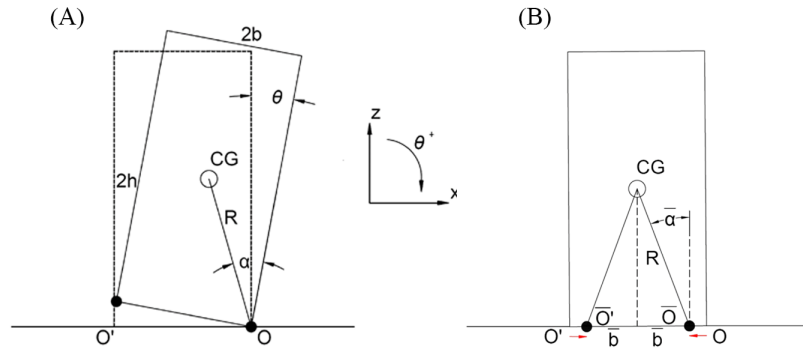


Figura 2.10: Schema di un blocco libero che si inclina (A) intorno al CR O secondo il modello di Housner [3] e (B) intorno al CR cinematico migrato (Figure da *Kalliontzis et al.* (2016) in [43])

Diversi studi hanno inoltre validato gli approcci teorici proposti mediante evidenze sperimentali [21, 25, 39, 44–46]. Numerose ricerche hanno dimostrato che il rocking può essere replicato per movimenti armonici o impulsivi del terreno e descritto usando particolari modelli analitici. Tuttavia, per i movimenti della base simili a quelli indotti dai terremoti, la reazione di oscillazione è stata spesso considerata "non riproducibile" a causa della sua estrema sensibilità a piccole variazioni nelle condizioni iniziali e negli input dinamici.

Negli ultimi anni, sono state condotte numerose prove sperimentali per determinare il coefficiente di restituzione (CoR) su vari campioni di muratura (non rinforzata) [39], su pietre di granito con un rapporto altezza/spessore variabile da quattro a otto, sottoposte a oscillazioni libere, moti armonici e casuali, e su campioni di diversi materiali da costruzione con vari rapporti di snellezza [21], come blocchi di calcestruzzo con base in alluminio che oscillano su una fondazione in acciaio. Tuttavia, molti lavori si limitano ad adattare i dati sperimentali senza mettere in discussione il modello proposto, poiché i valori di η ottenuti empiricamente sono tipicamente superiori a quelli previsti teoricamente.

Tuttavia, gli studi hanno dimostrato che piccole irregolarità sulle superfici di collisione producono notevoli differenze tra il valore del coefficiente di restituzione teorico e il valore di quello sperimentale; inoltre, la scelta del materiale dell'interfaccia [47] influenza fortemente la dissipazione nel comportamento di oscillazione libera. Dato che l'impatto alle interfacce è l'unica fonte di dissipazione di energia per una struttura libera di oscillare nella dinamica rocking, recentemente si è discusso sul modello

di Housner (ad esempio, [42, 48]), formulando nuovi approcci allo studio della dissipazione di energia. Uno dei modelli estesi più noti degli impatti oscillanti è quello che considera una posizione più realistica per il CR, tenendo conto della potenziale migrazione della forza risultante verso il centro della base a causa di una superficie di contatto estesa, come mostrato in Figura 2.10B. Questo approccio è stato adottato da [43] e [49], i quali hanno proposto un'espressione equivalente a quella di Housner per η . In particolare, l'espressione per η proposta da [43] estende quella presentata da Housner [3], tenendo conto dell'effetto della superficie di contatto estesa durante l'impatto, e ciò viene fatto per mezzo di una costante k , che porta alla seguente espressione:

$$\eta = \left\{ \frac{1 + \frac{mR^2}{I_0} \left[1 - (\sin \alpha)^2 (1 + k^2) \right]}{1 + \frac{mR^2}{I_0} \left[1 - (\sin \alpha)^2 (1 - k^2) \right]} \right\}^2 \quad (2.32)$$

dove $k = \bar{b}/b$ assume valori $0 \sim 1$, e il valore di η è costante per ogni impatto alle interfacce di oscillazione; l'Equazione (2.32) per blocchi rettangolari si riduce a:

$$\eta = \left[\frac{4 - 3 (\sin \alpha)^2 (1 + k^2)}{4 - 3 (\sin \alpha)^2 (1 - k^2)} \right]^2 \quad (2.33)$$

I valori di CoR ottenuti dalle Equazioni (2.31) e (2.33) sono principalmente influenzati dalla superficie di contatto della colonna, rappresentata dalla snellezza (α). Tuttavia, l'impatto alle interfacce è condizionato anche da altri fattori non considerati nella maggior parte della Letteratura, ovvero: (i) la velocità angolare prima dell'impatto, (ii) il comportamento anelastico del materiale dell'interfaccia durante l'impatto e (iii) le imperfezioni delle superfici di contatto [47].

La velocità angolare, condizione (i), è presa in considerazione nella quasi totalità degli approcci, poiché le colonne libere sviluppano velocità elevate immediatamente prima dell'impatto durante le prove di oscillazione libera. Al contrario, le condizioni (ii) e (iii) non sono considerate nelle Equazioni (2.33) e (2.31). Pertanto, il valore effettivo di η sarà inferiore a quello calcolato da queste equazioni, con una conseguente maggiore dissipazione di energia nella realtà. Questo rende le derivazioni analitiche conservative.

Il comportamento all'interfaccia ha un impatto significativo sull'integrità del blocco, influenzando in alcuni casi negativamente le prestazioni sismiche complessive. Per risolvere questi problemi, sono stati recentemente proposti alcuni modelli di blocchi

oscillanti che mirano a risolvere gli svantaggi intrinseci del moto rocking.

È però necessario ricordare che la dissipazione di energia nel movimento di oscillazione pura deriva principalmente dagli impatti sulle superfici di contatto, in cui la dissipazione totale di energia può essere descritta mediante un rapporto di smorzamento viscoso intrinseco (ξ_{in}), caratteristico della struttura, e un rapporto di smorzamento aggiuntivo (ξ_{im}) dovuto agli impatti. Il rapporto di smorzamento viscoso equivalente ξ sarà perciò dato dalla seguente espressione:

$$\xi = \xi_{in} + \xi_{im} \quad (2.34)$$

Il valore di ξ_{in} varia tra il 2% e il 5% per strutture che oscillano in campo elastico, mentre diversi studi hanno proposto relazioni che coinvolgono ξ_{im} e il coefficiente di restituzione (CoR) η per rappresentare la perdita di energia durante gli urti come di seguito riportato in alcuni dei modelli equivalenti proposti in letteratura:

$$\text{Giannini \& Masiani (1990) [50] :} \quad \xi_{im} = \frac{2 \cdot (1 - \eta)}{\pi \cdot (1 + \eta)}, \quad (2.35)$$

$$\text{Makris \& Konstantinidis (2003) [51] :} \quad \xi_{im} = -0.34 \ln \eta^2, \quad (2.36)$$

$$\text{Anagnostopoulos (2004) [52] :} \quad \xi_{im} = \frac{-\ln \eta^2}{\sqrt{\pi^2 + (\ln \eta^2)^2}}, \quad (2.37)$$

$$\text{Cheng (2007) [53] :} \quad \xi_{im} = \frac{1 - \eta^2}{\pi \left[1 - \frac{u_{CG}}{b} \right]}, \quad (2.38)$$

Si ricordi che Saint-Venant fu il primo a notare l'effetto delle onde elastiche nei corpi durante l'impatto di lunghe aste, dimostrando che anche materiali perfettamente elastici avranno un coefficiente di restituzione inferiore a uno. Hunter [54] analizzò le perdite di energia dovute alla propagazione delle onde elastiche durante gli impatti elastici, scoprendo che per una sfera di acciaio che colpisce un grande blocco di acciaio o vetro, meno dell'1% dell'energia cinetica viene convertita in onde elastiche. Reed [55] rivalutò queste perdite, stimando una perdita di energia circa 4.5 volte superiore a quella calcolata da Hunter. Tillett [56] invece studiò sperimentalmente l'impatto di sfere d'acciaio su lastre di vetro e plastica, stimando perdite di energia del 3% per una sfera di acciaio che impatta sul vetro. Pertanto il coefficiente di restituzione è risultato dipendente non solo dalle dimensioni del provino ma anche e soprattutto dalle sue proprietà materiali.

	$h/b[-]$	$\alpha[rad]$	η_{exp}	η_{Hous}	$\xi_{G.M.}[\%]$	$\xi_{M.K.}[\%]$	$\xi_A[\%]$	$\xi_C[\%]$
Anooshehpoor [57]	2.38	0.40	0.78	0.77	7.87	16.89	15.62	12.71
Peña et al. [39]	2.85	0.35	0.93	0.86	2.31	4.94	4.61	4.50
ElGawady et al. [47]	3.00	0.33	0.82	0.84	6.30	13.50	12.53	10.29
ElGawady et al. [47]	3.00	0.33	0.84	0.84	5.54	11.86	11.03	9.32
ElGawady et al. [47]	3.00	0.33	0.79	0.84	7.47	16.03	14.84	12.22
Anooshehpoor [57]	3.17	0.31	0.86	0.86	4.79	10.26	9.56	8.23
Peña et al. [39]	4.00	0.25	0.94	0.91	1.97	4.21	3.94	3.86
Anooshehpoor [57]	4.76	0.21	0.94	0.93	1.97	4.21	3.94	3.86
Peña et al. [39]	5.88	0.17	0.97	0.96	0.97	2.07	1.94	1.61
Peña et al. [39]	8.33	0.12	0.98	0.98	0.64	1.37	1.30	1.29
Anooshehpoor [57]	9.52	0.11	0.98	0.98	0.64	1.37	1.30	1.29

Tabella 2.1: Valutazioni sperimentali dei valori di Coefficiente di Restituzione (CoR) alle interfacce (η_{exp}) per colonne rettangolari libere di oscillare con diversi rapporti (h/b), snellezza (α) e materiali; Rapporto di smorzamento viscoso equivalente (ξ_{imp}) relativo alla sola componente dovuta agli impatti per diversi modelli presenti in letteratura

La Tabella 2.1 mostra i valori di ξ calcolati dalle Equazioni (2.35) a (2.38) per diversi materiali di interfaccia, utilizzando i valori di CoR determinati sperimentalmente. Da tale confronto, si può osservare che le colonne tozze dissipano più energia rispetto a quelle snelle, a causa della maggiore superficie di contatto che aumenta la dissipazione energetica. Tuttavia, in tutti i casi riportati, ξ è inferiore al 20%.

La funzione δ di Dirac per lo studio dell'impatto nella dinamica rocking

Un ulteriore approccio allo studio del moto oscillatorio di blocchi rigidi si basa sull'adozione delle funzioni δ di Dirac nella formulazione delle equazioni differenziali del moto. Prieto (2004) [38] ha utilizzato la funzione δ di Dirac per rappresentare gli effetti discontinui di un blocco rigido oscillante. Questo metodo consente di semplificare le tradizionali equazioni differenziali non lineari del moto, riducendole a un'unica Equazione differenziale continua. Inoltre, l'uso della funzione δ di Dirac elimina la necessità di introdurre un coefficiente di restituzione ad hoc in modo empirico. Nello specifico la funzione δ di Dirac agisce come una forza impulsiva al momento dell'impatto, simulando l'energia dissipata attraverso il lavoro svolto da tale forza. Questo approccio è stato applicato per modellare il comportamento di un

blocco oscillante sia in condizioni di oscillazioni libere sia sotto forzanti armoniche, dimostrando che la rappresentazione δ di Dirac può replicare efficacemente i risultati dell'analisi classica. L'approccio basato sulla funzione δ di Dirac offre una formulazione più intuitiva e basata sulla forza, consentendo una quantificazione più precisa degli effetti all'interfaccia al momento dell'impatto. La chiave di questo metodo è l'introduzione di una forza impulsiva, F_δ , nelle equazioni differenziali generalizzate del moto.

Dunque, sviluppata l'energia potenziale del sistema in una serie di Taylor in funzione di θ per ogni direzione, supponendo un'elevata snellezza ($\cos \alpha \approx 1$) e ($\sin \alpha \approx \alpha$) e considerando solo i termini fino al secondo ordine, l'energia potenziale V può essere riformulata come:

$$V(\theta) = mgR \cos(\tilde{\alpha} + \theta) \approx mgR \left[1 + \tilde{\alpha} \theta - \frac{\theta^2}{2} \right] \quad (2.39)$$

Eliminando il termine costante mgR , la Lagrangiana ottenuta è:

$$L = I_O \dot{\theta}^2 - mgR \left[\tilde{\alpha} \theta - \frac{\theta^2}{2} \right] \quad (2.40)$$

ma se si introducono due parametri adimensionali per l'angolo di oscillazione e per il tempo, definiti rispettivamente:

$$\Theta \equiv \frac{\theta}{\alpha} \quad (2.41)$$

$$\tau \equiv pt \quad (2.42)$$

Attraverso le opportune sostituzioni, la funzione Lagrangiana, nelle variabili Θ e $\dot{\Theta} \equiv d\Theta/d\tau$ diventa:

$$L(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} |\Theta|^2 - |\Theta| \quad (2.43)$$

mentre le Equazioni di moto a tratti classiche ottenute dall'Equazione di Eulero - Lagrange in Θ sono:

$$\begin{cases} \ddot{\Theta} - \Theta + 1 = 0 & \text{per } \Theta > 0 \\ \ddot{\Theta} - \Theta - 1 = 0 & \text{per } \Theta < 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Effettuando le opportune sostituzioni, si ottiene la nuova Equazione differenziale:

$$F_\delta = \ddot{\Theta} - \Theta + \text{sgn}(\Theta) \quad (2.45)$$

Per riprodurre l'effetto del classico coefficiente di restituzione η , la forza F_δ deve soddisfare i seguenti tre criteri:

1. La forza deve essere concentrata nello spazio e nel tempo,
2. La forza deve causare un cambiamento improvviso nella velocità di rotazione al momento dell'impatto, riducendo la velocità di rotazione al valore specificato da η ,
3. La forza deve diminuire la velocità di rotazione in entrambe le direzioni del moto.

Concettualmente, poiché $F(\Theta, \dot{\Theta})$ è attiva solo durante una specifica rotazione e la sua intensità è legata alla velocità d'impatto, il modello più intuitivo è rappresentato dal prodotto di due sottofunzioni indipendenti: una dipendente dalla rotazione e l'altra dalla velocità, da cui si ottiene, dopo opportuni calcoli e rimaneggiamenti un'Equazione differenziale continua del moto per un blocco snello oscillante come segue:

$$\ddot{\Theta} - \Theta + \tanh\left(\frac{\Theta}{n}\right) = \frac{-\ln\sqrt{\eta}}{n\sqrt{\pi}} \tanh\left(\frac{\dot{\Theta}}{n}\right) \dot{\Theta}^2 e^{\left(-\frac{\Theta^2}{n^2}\right)} \quad (2.46)$$

L'Equazione (2.46) può essere integrata numericamente utilizzando l'approccio classico a tratti (*piecewise*) per determinare la risposta temporale dei blocchi rigidi oscillanti.

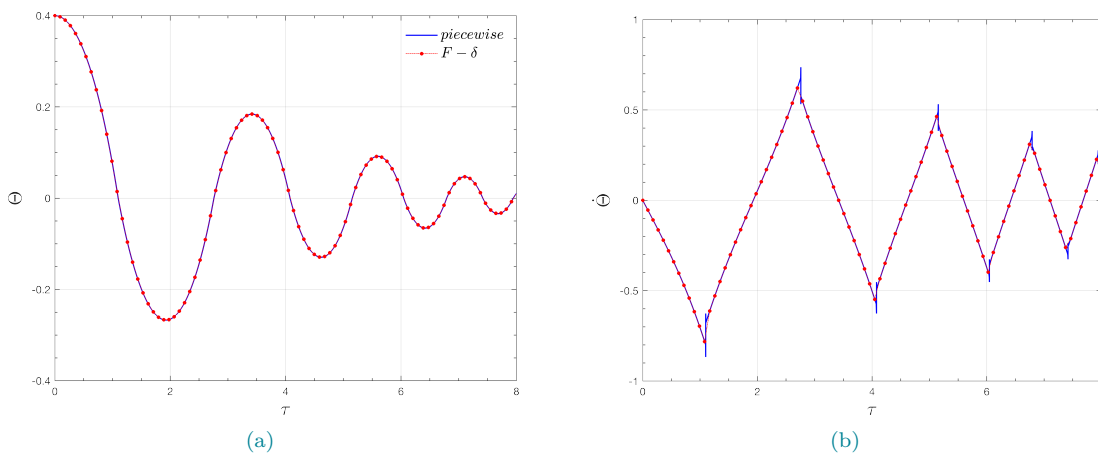


Figura 2.11: Risposta temporale di un blocco rigido libero 1:3, rilasciato con un angolo iniziale: (a) diagramma rotazione-tempo normalizzati; (b) diagramma velocità-tempo normalizzati

La Figura 2.11 mostra i risultati del confronto tra le due formulazioni eseguite su due blocchi rigidi identici con un rapporto di dimensioni 1:3, oscillanti dopo una ro-

tazione iniziale $\Theta_0 = 0.40$, evidenziando che le due formulazioni producono risultati identici, eccetto per l'accelerazione significativamente maggiore nella formulazione di Dirac al punto di impatto. Questi picchi di accelerazione hanno un impatto minimo sulla storia rotazionale del blocco.

Il parametro di penalità della formulazione di Dirac, n , permette un controllo accurato della dissipazione energetica e della velocità di trasferimento del perno oscillante. I valori di n devono essere selezionati in funzione del passo temporale di integrazione, $\delta\tau$: un valore inferiore di n implica una forza di Dirac maggiore ma di durata più breve. Tuttavia, considerando che la soluzione viene spesso determinata tramite integrazione numerica con un passo temporale prefissato, la risoluzione temporale minima possibile è $\delta\tau$. Pertanto, n ha un limite inferiore funzionale pari a $\delta\tau$, poiché qualsiasi valore inferiore risulterebbe ridondante. Allo stesso modo, $\delta\tau$ deve essere mantenuto sufficientemente ridotto per garantire il rilevamento dell'impatto. La Figura 2.12 mostra i risultati di tre simulazioni che illustrano l'impatto complessivo della variazione di n .

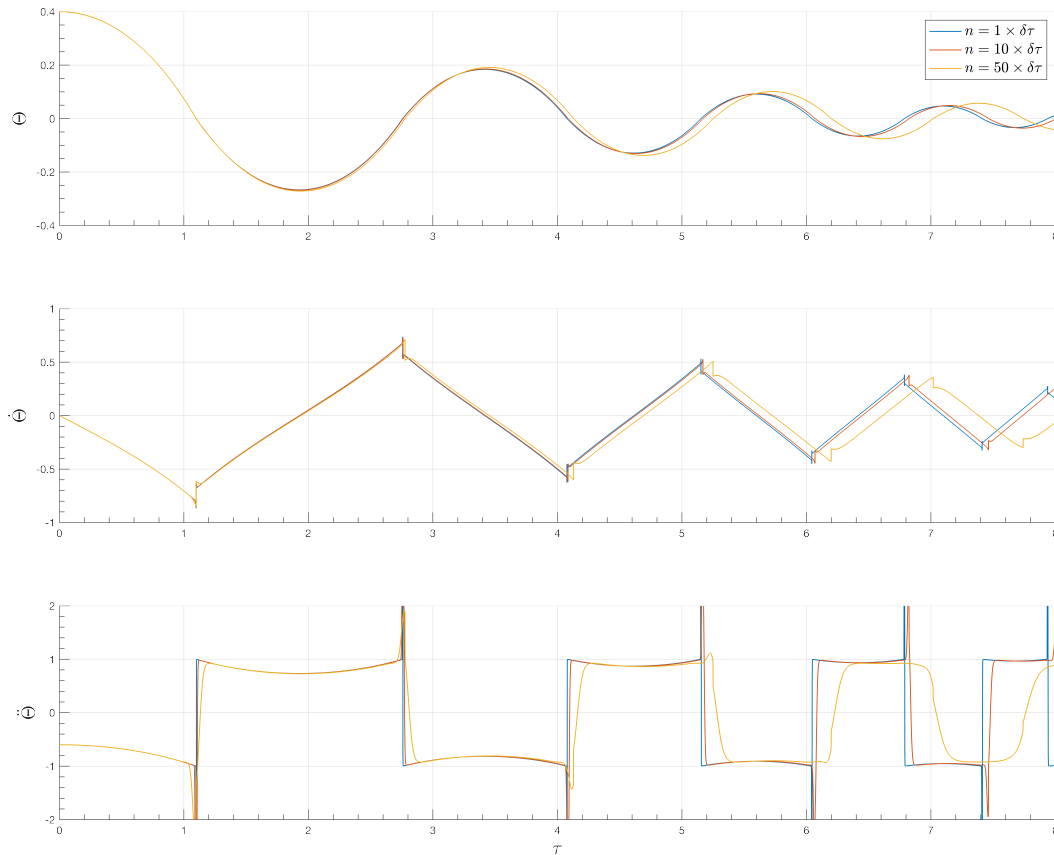


Figura 2.12: Risposta temporale normalizzata di un blocco rigido libero al variare del parametro n

3 | UN NUOVO APPROCCIO TEORICO ALLO STUDIO DELLA DINAMICA DELLE STRUTTURE IN MURATURA: IL ROCKING DEI BLOCCHI RIGIDI A SPIGOLI RACCORDATI

In questo capitolo si propone il modello di oscillatore libero con bordi raccordati, che rappresenta una novità rispetto al tradizionale design del blocco oscillante a profilo rettangolare. Si indaga come questa piccola modifica della geometria del blocco possa influenzare le prestazioni dinamiche complessive del sistema.

Al fine di analizzare il comportamento dinamico di tale oscillatore, si derivano le equazioni analitiche del moto. Queste vengono successivamente utilizzate per confrontare la risposta dinamica della configurazione danneggiata del blocco (ossia la risposta ottenuta dal blocco con spigoli raccordati), con quella del modello classico di Housner a spigoli vivi, esaminando le variazioni nella storia temporale in termini di spostamenti e di velocità.

I risultati ottenuti dal confronto tra il modello proposto e quello classico hanno costituito la base di partenza per formulare il nuovo modello di contatto descritto nel capitolo 4. Questo secondo modello consente di studiare l'influenza delle proprietà meccaniche dei materiali dei blocchi nella dinamica rocking in termini di perdita di energia all'interfaccia durante l'impatto.

3.1. MODELLO TEORICO PROPOSTO

3.1.1. Introduzione

Le costruzioni in muratura sono particolarmente vulnerabili alle azioni sismiche per cui l'analisi della loro risposta sismica costituisce un requisito fondamentale per il progetto e la realizzazione di mirati interventi di recupero e consolidamento strutturale. In questo contesto, appare molto interessante lo studio dell'effetto che le azioni sismiche comportano nella modifica della geometria dei blocchi.

Il materiale muratura a causa della sua limitata resistenza a trazione tende a presentare particolari fratture che comportano non solo una deturpazione visibile dell'estetica del bene architettonico e archeologico ma anche un danneggiamento che può compromettere la sicurezza strutturale dello stesso. A tal proposito, si è scelto di formulare un nuovo modello di blocco rigido libero oscillante che presentasse segni di danneggiamento negli spigoli a contatto con la base di appoggio. Per studiare l'evoluzione del comportamento rocking di questo blocco, si è adottata un'approssimazione del bordo fratturato mediante un raccordo, al fine di modellare in maniera più accurata la geometria modificata del blocco. Questo raccordo curvilineo agli spigoli fratturati ha consentito di esaminare la dinamica del blocco sotto varie azioni, offrendo una rappresentazione più fedele delle sue risposte meccaniche e delle potenziali evoluzioni durante successivi eventi sismici.

Nell'ambito di questa analisi, sono stati introdotti nuovi parametri geometrici per descrivere con precisione la geometria del blocco dopo la frattura, con l'intento di comprendere meglio la distribuzione delle tensioni e il comportamento del blocco in presenza di tali modifiche.

Il modello proposto nel presente capitolo si ispira ai lavori di ricerca in [58] e [59]. Mentre questi studi si focalizzano rispettivamente sull'uso di estensioni curve alla base dei blocchi per migliorarne la stabilità contro il ribaltamento e sull'introduzione di pareti rocking a base curva come alternativa alle pareti a profilo rettangolare, il presente lavoro si distingue per l'analisi della dinamica rocking di blocchi rigidi caratterizzati da spigoli fratturati e raccordati, valutando l'influenza di queste modifiche geometriche sul comportamento dinamico complessivo delle strutture in muratura.

3.1.2. Oscillatori con spigoli raccordati

Geometria del modello

In questa sezione, vengono ricavate le Equazioni del moto in presenza di accelerazioni

orizzontali del terreno e determinato il comportamento in termini di forza-rotazione del blocco rigido a spigoli raccordati libero, rappresentato in Figura 3.1, così come è stato espresso da [58] nel caso di oscillatori rigidi con estensioni di base curve.

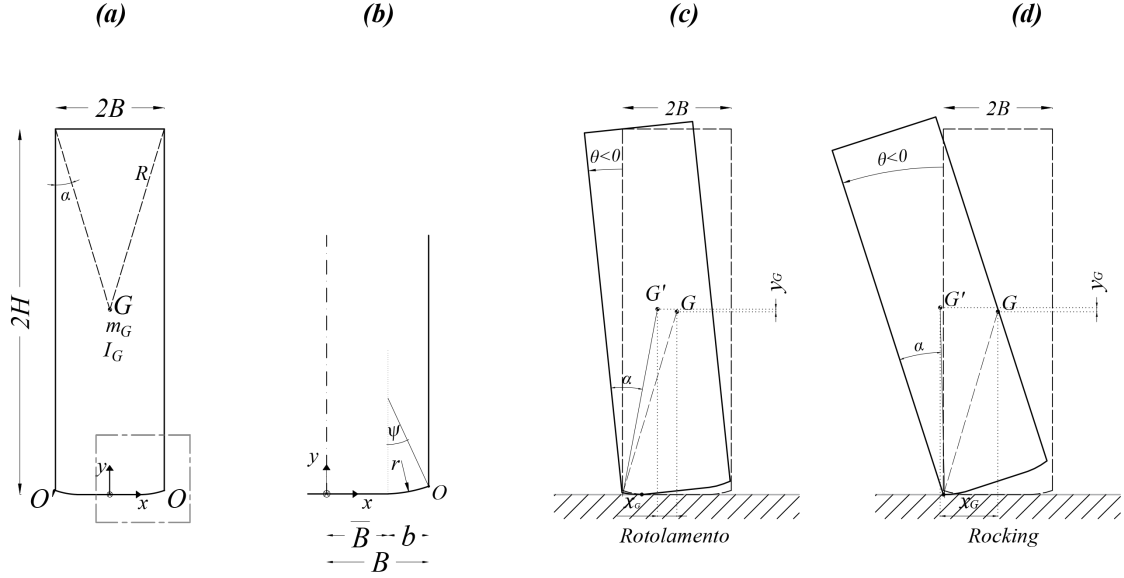


Figura 3.1: Modello di blocco rigido con spigoli raccordati: (a) Modello geometrico; (b) Dettaglio del raccordo; (c) Fase I: Rotolamento; (d) Fase II: Rocking.

Il blocco con spigoli raccordati introduce una modalità di movimento aggiuntiva, rispetto al classico moto rocking, denominata **rotolamento**. Questo aspetto permette all'oscillatore di esibire un comportamento dinamico più complesso, che può essere suddiviso analiticamente in due *fasi* distinte:

1. *Rotolamento*: dopo il sollevamento, il blocco rotolerà sulla parte curva, finché il punto di contatto non raggiungerà il bordo estremo; per cui il centro istantaneo di rotazione si trova al di sotto della superficie di supporto rigida ed è in continuo movimento;
2. *Rocking*: quando il blocco si inclina oltre l'angolo di rotolamento, subisce un moto oscillatorio attorno ai centri di rotazione O e O' (fino al possibile ribaltamento).

A queste si aggiunge una fase ridotta di *Rocking* dove il blocco rettangolare rigido avrà larghezza di base effettiva $2\bar{B}$.

La geometria del blocco, è qui descritta attraverso la definizione di tre parametri principali.

Larghezza della parte curva $b = B - \bar{B}$: questo parametro rappresenta la differenza

tra la semi-larghezza B e la larghezza della base piana. In termini meccanici, questa modifica nella larghezza influenza la distribuzione della forza d'urto. Una larghezza ridotta implica una riduzione nelle forze d'urto, distribuite su una superficie minore; il raggio del raccordo r e l'angolo ψ che separa le due fasi del moto.

Attraverso questi parametri è possibile così definire la relazione geometrica:

$$b = r \cdot \sin \psi = B - \overline{B}, \quad (3.1)$$

con $B = H \cdot \tan \alpha$ e $\overline{B} = H \cdot \tan \alpha'$. Definendo il parametro normalizzato per il raggio di curvatura, dato dalla relazione:

$$\rho = \frac{r}{2H} = \frac{r}{2R \cos \alpha} \quad [-] \quad (3.2)$$

possiamo quindi calcolare l'angolo di passaggio tra le due fasi ψ , dopo aver assegnato la larghezza b e il parametro ρ :

$$\psi = \arcsin \frac{\tan \alpha - \tan \alpha'}{2\rho}. \quad (3.3)$$

Cinematica

Gli spostamenti orizzontali e verticali del centro di massa G durante la *Fase I* di rotolamento del blocco rigido a spigoli raccordati sono definiti secondo le relazioni, posto $\tilde{\alpha} = \text{sgn}(\theta) \cdot \alpha$:

$$x_G^I = [R \sin \tilde{\alpha} - R \sin(\tilde{\alpha} - \theta)] + r \cdot (\theta - \sin \theta)^1 \quad (3.4a)$$

$$y_G^I = [R \cos(\tilde{\alpha} - \theta)] + r \cdot (1 - \cos \theta) \quad (3.4b)$$

Ricordando che il momento dovuto alla forza di gravità che agisce sul baricentro del blocco è espresso come il prodotto:

$$\Upsilon = g m_G \cdot x_G^I, \quad (3.5)$$

e che la forza di ripristino è la forza orizzontale che agisce al baricentro del blocco

¹Il termine $r \cdot (\theta - \sin \theta)$ è conosciuto in meccanica come l'integrale del moto cicloidale, che è il movimento di un punto su una circonferenza che rotola senza slittare lungo una linea retta; è un termine correttivo che entra in gioco quando stiamo considerando il movimento rotatorio di un corpo che non ha un bordo perfettamente circolare, ma piuttosto un bordo arrotondato o un'altra forma che causa un movimento non standard durante la rotazione. Il termine rappresenta la correzione per la lunghezza dell'arco percorsa dal punto di contatto del corpo rigido con il suolo rispetto al centro di curvatura dell'arco durante un angolo di rotazione.

e crea un momento che si oppone al momento della forza di gravità, per l'equilibrio dei momenti, si ottiene:

$$F_R \cdot y_G^I = \Upsilon. \quad (3.6)$$

Sostituendo l'Equazione (3.4), con riferimento alle sole distanze transitorie tra il baricentro e il CR, nell'Equazione (3.6) e risolvendo per F_R si ottiene:

$$F_R = \frac{gm_G \cdot x_G^I}{y_G^I} = gm_G \frac{R \sin(\alpha - \theta) + r \sin \theta}{R \cos(\alpha - \theta) + r \cdot (1 - \cos \theta)} \quad (3.7)$$

da cui è possibile determinare la rigidezza $\kappa^I = \frac{\partial}{\partial \theta} F_R$.

Analogamente, gli spostamenti del centro di massa G durante la *Fase II* di oscillazione rocking, posto $\tilde{\psi} = \text{sgn}(\theta) \cdot \psi$, sono:

$$x_G^{II} = [R \sin \tilde{\alpha} - R \sin(\tilde{\alpha} - \theta)] + r \cdot [\tilde{\psi} - \sin(\tilde{\psi} - \theta) - \sin \theta] \quad (3.8a)$$

$$y_G^{II} = R \cos(\tilde{\alpha} - \theta) + r \cdot [\cos(\tilde{\psi} - \theta) - \cos \theta] \quad (3.8b)$$

Equazioni del moto

La formulazione analitica dell'Equazione del moto di un blocco rigido, derivata dall'Equazione di *Lagrange*, descritta nell'Appendice A.1 sotto l'eccitazione di un impulso dinamico è la seguente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad (3.9)$$

dove T è l'energia cinetica totale, V è l'energia potenziale delle forze esterne, $\theta = \theta(t)$ angolo di rotazione misurato dalla verticale, $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$ la sua derivata rispetto al tempo t .

L'Equazione del moto del blocco rigido che rotola attorno al raccordo curvo è espressa dalla relazione:

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta} \left[\frac{4}{3} + 4\rho \cos \alpha (\cos(\tilde{\alpha} - \theta) - \cos \alpha) + 8\rho^2 \cos^2 \alpha (1 - \cos \theta) \right] \\ & + \dot{\theta}^2 \left[-2\rho \cos \alpha \sin(\tilde{\alpha} - \theta) + 4\rho^2 \cos^2 \alpha \sin \theta \right] \\ & - \frac{\ddot{u}_g}{R} [\cos(\tilde{\alpha} - \theta) + 2\rho \cos \alpha (1 - \cos \theta)] \\ & - \frac{g}{R} [\sin(\tilde{\alpha} - \theta) + 2\rho \cos \alpha \sin \theta] = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Durante la prima fase, si osserva che il centro di istantaneo rotazione è in continuo movimento e si trova al di sotto della superficie rigida di supporto. Nella fase di oscillazione pura, attorno agli spigoli, l'Equazione del moto è espressa dalla relazione:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} & \left[\frac{4}{3} + 8\rho^2 \cos^2 \alpha (1 - \cos \psi) + 4\rho \cos \alpha (\cos(\alpha - \psi) + \cos \alpha) \right] \\ & + \frac{\ddot{u}_g}{R} \left[\cos(\tilde{\alpha} - \theta) + 2\rho \cos \alpha (\cos(\tilde{\psi} - \theta) - \cos \theta) \right] \\ & - \frac{g}{R} \left[\sin(\tilde{\alpha} - \theta) + 2\rho \cos \alpha (\sin(\tilde{\psi} - \theta) + \sin \theta) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Le Equazioni (3.10) e (3.11) possono essere linearizzate rispetto ad α e θ se si considerano blocchi sottili e snelli, in modo tale che:

$$\ddot{\theta} = -p^2 \cdot \left[\tilde{\alpha} - \theta(1 - 2\rho) + \frac{\ddot{u}_g}{g} \right], \quad (3.12)$$

$$\ddot{\theta} = -p^2 \cdot \left[\tilde{\alpha} - \theta + 2\tilde{\psi}\rho + \frac{\ddot{u}_g}{g} \right] \quad (3.13)$$

3.1.3. Analisi comparativa del comportamento dinamico degli oscillatori rigidi raccordati

In questo paragrafo, l'attenzione è rivolta all'analisi comparativa delle risposte dinamiche di oscillatori rigidi sottoposti a specifiche sollecitazioni. L'obiettivo è comprendere come diverse condizioni influenzino il comportamento dinamico di tali sistemi. In particolare, nella prima parte dello studio, vengono analizzate le risposte nelle fasi di rotolamento e di rocking di alcuni esempi diversi di oscillatori con differenti parametri, sottoposti a impulsi di accelerazione ideali. Questi impulsi sono rappresentati da funzioni di Ricker antisimmetriche, caratterizzati da ampiezza a_p e periodo ciclico dominante $T_p = 2\pi/\omega_p$. Si confrontano le storie temporali delle risposte degli oscillatori, esaminando come le variazioni dei parametri influenzino gli spostamenti e le velocità nel tempo. Questo confronto temporale permette di identificare i pattern di comportamento dinamico e le differenze nelle risposte iniziali degli oscillatori.

Nella seconda parte, l'analisi si concentra sull'uso degli spettri di risposta per esaminare ulteriormente il comportamento dinamico degli oscillatori. Gli spettri di risposta vengono utilizzati per delineare con precisione le reazioni degli oscillatori a vari stimoli, offrendo una visione approfondita delle loro caratteristiche sotto diverse

condizioni di sollecitazione. Questo studio permette di esplorare in dettaglio le specificità delle risposte dinamiche, inclusi eventuali fenomeni di risonanza o instabilità che possono emergere sotto determinate condizioni.

L'obiettivo di questo capitolo è fornire una comprensione completa e dettagliata delle risposte dinamiche degli oscillatori rigidi raccordati, integrando approcci teorici e metodi numerici per ottenere un quadro chiaro delle loro dinamiche. L'impiego di impulsi di accelerazione ideali consente di isolare e studiare con precisione gli effetti dei parametri principali sugli oscillatori, contribuendo allo sviluppo di modelli più accurati e affidabili per applicazioni pratiche.

3.1.3.1. Confronto delle storie temporali di risposta

Il confronto delle storie temporali degli spostamenti angolari di blocchi con differenti raggi di curvatura adimensionali ρ , calcolate utilizzando le Equazioni del moto in forma non lineare (3.10) e (3.11), è riportato nella Figura 3.2. Gli impulsi applicati sono rappresentati da funzioni di Ricker antisimmetriche ($a_p = 0.405 g$, $T_p = 2 s$), che approssimano adeguatamente il carattere impulsivo dei moti al suolo in prossimità della faglia sia dal punto di vista qualitativo che quantitativo [60] e definita dall'Equazione:

$$\ddot{u}_g(t) = \frac{a_p}{\beta} \left(\frac{4\pi^2 t^2}{3T_p^2} - 3 \right) \frac{2\pi t}{\sqrt{3}T_p} e^{-\frac{1}{2} \frac{4\pi^2 t^2}{3T_p^2}} \quad (3.14)$$

con $\beta = 1.38$ fattore che impone alla funzione di avere un massimo di ampiezza. L'obiettivo è comprendere il comportamento del sistema non durante l'intero sisma, ma la sua risposta al picco massimo di accelerazione o velocità. Gli altri parametri che caratterizzano i quattro modelli di blocchi esaminati sono presentati nella Tabella 3.1. Dal grafico si osserva che, all'aumentare del raggio ρ , l'ampiezza di oscillazione aumenta leggermente. Questo fenomeno può essere attribuito alla maggiore inerzia introdotta dalla curvatura più ampia, che consente agli oscillatori di accumulare energia cinetica più facilmente durante l'impulso. Dopo i primi 4.2 secondi, si nota un comportamento interessante: il primo e l'ultimo blocco sono in controfase. In altre parole, le creste di uno sono allineate verticalmente con le gole dell'altro, e viceversa. Questo comportamento in controfase suggerisce l'esistenza di interazioni dinamiche complesse tra i blocchi, che possono essere influenzate da parametri come la rigidità del sistema e le caratteristiche dell'impulso sismico applicato.

Oscillatore	$2H$	$\tan \alpha$	$\bar{B}$	b	ρ	θ_{max}
A1	3 m	0.245	0.375 m	0.3 m	0.17	0.968α
A2	3 m	0.245	0.375 m	0.3 m	0.25	0.896α
A3	3 m	0.245	0.375 m	0.3 m	0.33	0.851α
A4	3 m	0.245	0.375 m	0.3 m	0.50	0.787α

Tabella 3.1: Dettagli degli oscillatori rigidi raccordati

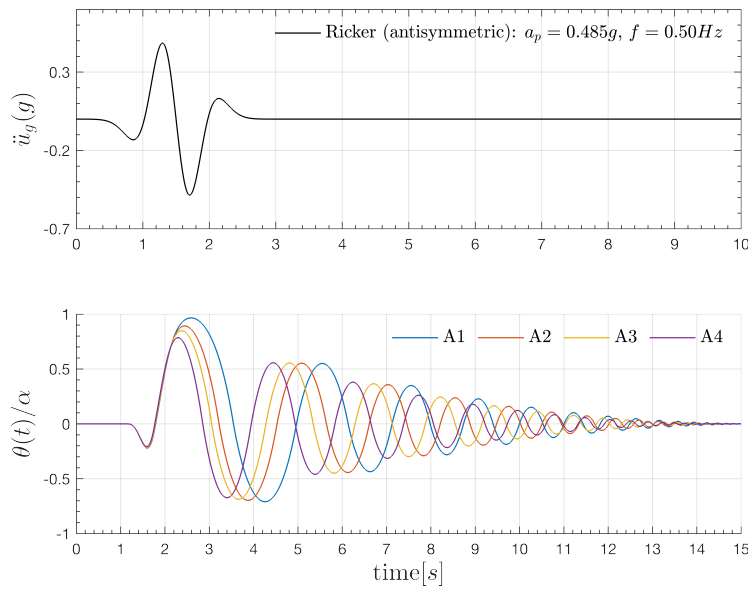


Figura 3.2: Risposte della storia temporale dell'angolo di oscillazione per i quattro blocchi raccordati a confronto

Per una migliore comprensione del comportamento del sistema ed eliminare l'effetto del tempo, sono stati tracciati i diagrammi di fase. Questi diagrammi si rivelano strumenti utili per identificare il comportamento del sistema, poiché permettono di visualizzare la relazione tra la posizione e la velocità angolare dei blocchi in uno spazio bidimensionale. Analizzando il diagramma di fase, il blocco sollecitato si trova appena sotto l'angolo critico di ribaltamento sull'asse x. Durante la simulazione, ruota in senso orario seguendo un percorso conservativo, fino a raggiungere la posizione verticale sull'asse y. A questo punto, la velocità angolare del blocco subisce una riduzione istantanea in accordo con il coefficiente di restituzione descritto dall'Equazione (2.31), simulando l'effetto di un impatto. Nel diagramma di fase, questo si manifesta come un brusco spostamento verso l'origine ogni volta che il blocco attraversa l'asse y. Sebbene non sia illustrato esplicitamente nella Figura 3.3, alla fine il tracciato ruoterà verso l'origine, mostrando che, nel lungo termine, il

blocco si fermerà in posizione verticale con rotazione e velocità (x,y) pari a zero. Dal confronto dei diagrammi di fase, si osserva che l'ampiezza normalizzata è maggiore nel primo blocco (A1) rispetto al quarto blocco (A4). Questo risultato può indicare una maggiore sensibilità del primo blocco alle condizioni iniziali dell'impulso, suggerendo una risposta più marcata e reattiva rispetto al quarto.

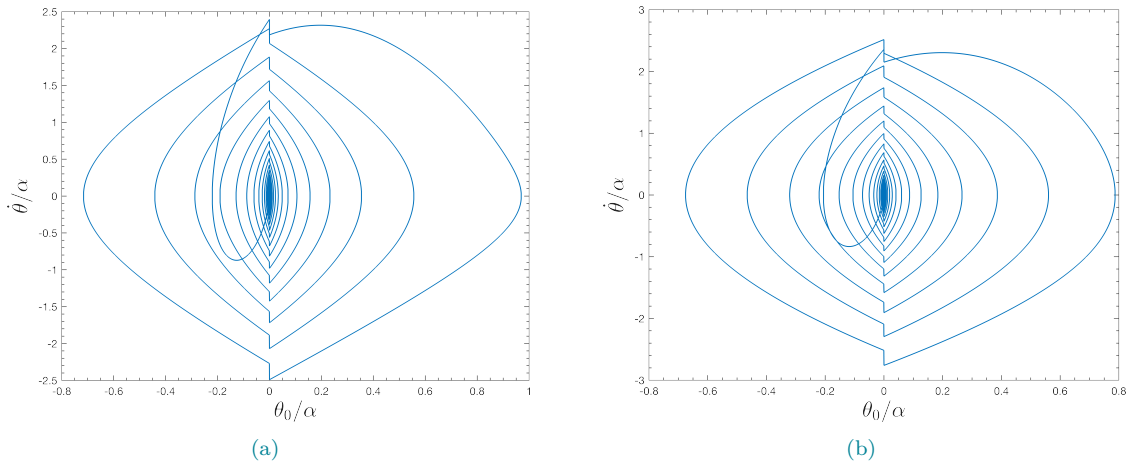


Figura 3.3: Ritratto di fase di un blocco rigido oscillante con $\eta = 0.9$; (a) A1: blocco di snellezza $\tan \alpha = 0.25$ e $\rho = 0.17$; (b) A4: blocco di snellezza $\tan \alpha = 0.25$ e $\rho = 0.50$

Equivalenza dimensionale

Successivamente, è stato condotto uno studio comparativo della risposta temporale tra un blocco prismatico e uno con spigoli raccordati (denominati rispettivamente $B1$ e $B2^c$), entrambi sottoposti a un impulso antisimmetrico con un'ampiezza di accelerazione $a_p = 0.405g$, mostrati nella Figura 3.4b e le loro informazioni dettagliate sono riportate nella Tabella 3.2.

La Figura 3.4a riporta le storie temporali di risposta per l'angolo di inclinazione (normalizzato rispetto ad α). Le risposte coincidono bene, anche se il sistema $B1$ ha un comportamento di rocking puro, e il sistema $B2^c$ tiene conto della prima fase di rotolamento. Questo confronto ha quindi permesso di esplorare le differenze nelle risposte dinamiche tra geometrie dimensionalmente equivalenti sotto condizioni di sollecitazione più intense. Dal confronto tra il blocco $B2^c$ e il suo equivalente $B1$ nel modello di Housner, si osserva che mentre il blocco $B1$ oscilla attorno ai suoi due spigoli di base, il suo equivalente $B2^c$ raccordato alla base, presenta un'ampiezza di oscillazione maggiore, attribuibile al contributo significativo della fase di roto-

lamento, che introduce ulteriori componenti di movimento nel sistema. Ancor più evidente è il confronto dei diagrammi di fase, dai quali emerge che l'ampiezza delle oscillazioni del blocco $B1$ è circa la metà di quella del blocco $B2^c$. Questo indica che, a parità di ampiezza massima di sollecitazione, il blocco $B2^c$ dimostra una capacità di stabilità al ribaltamento circa doppia rispetto a $B1$. Di conseguenza, l'insorgere di fratture lungo i bordi, assimilabili a raccordi, sembra avere un risvolto positivo in termini di capacità dinamica del sistema, contribuendo a migliorare la stabilità globale sotto condizioni di sollecitazione più intense.

Questa analisi dettagliata permette di evidenziare le differenze nel comportamento dinamico dei blocchi con geometrie diverse, fornendo una comprensione più approfondita delle loro risposte sotto sollecitazioni impulsive.

Oscillatore	$2H$	$\tan \alpha$	b	ρ	θ_{max}	θ_c
$B1$	6 m	0.25	—	—	0.416α	1.00α
$B2^c$	3 m	0.25	0.225 m	0.25	0.868α	1.50α

Tabella 3.2: Dettagli degli oscillatori rigidi dimensionalmente equivalenti

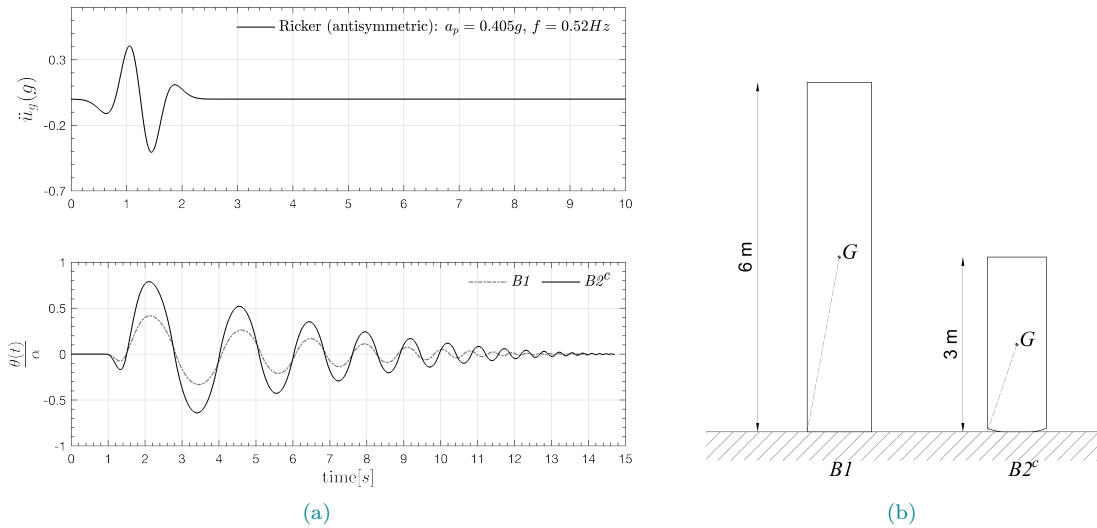


Figura 3.4: Confronto tra gli oscillatori: $B1$ vs. $B2^c$: (a) Storie temporale di risposta quando sottoposti ad un impulso antisimmetrico Ricker;

I risultati ottenuti hanno confermato la scelta di aver voluto analizzare blocchi rigidi con spigoli raccordati al fine di meglio simulare il danneggiamento reale dei blocchi. Infatti, la geometria modificata, oltre alle condizioni di sollecitazione, può notevolmente influenzare la dinamica di un sistema rocking. Per cui, la modellazione della

dinamica di questi sistemi non può non tener conto delle modifiche nella geometria che durante la ripetuta oscillazione il blocco e ancor più i sistemi multiblocco più articolati (come triliti e archi) possono subire.

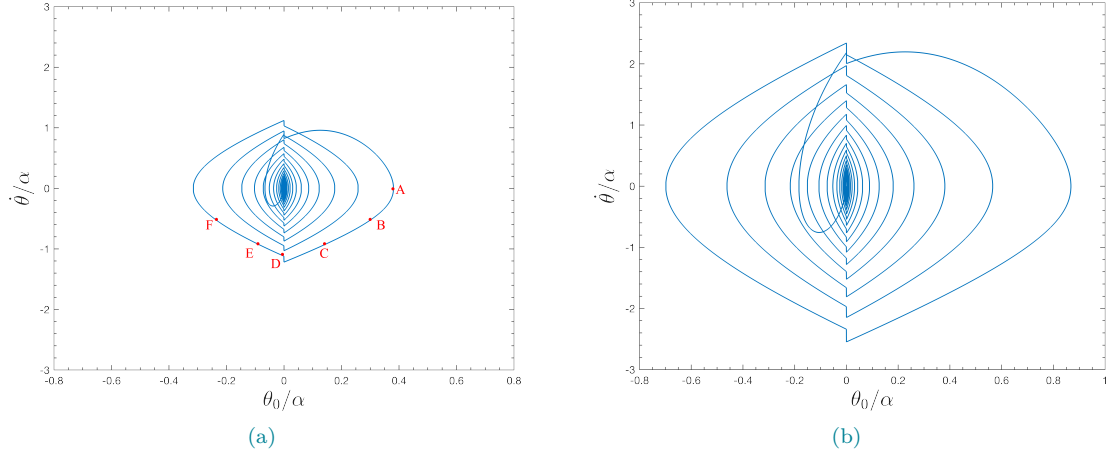


Figura 3.5: Confronto dei Ritratti di fase tra blocchi rigidi oscillanti dimensionalmente equivalenti con $\eta = 0.9$; (a) B1: blocco secondo il modello di Housner; (b) B2^c: blocco con spigoli raccordati e raggio normalizzato $\rho = 0.25$

Risulta a questo punto importante osservare la risposta del modello di blocco oscillante a spigoli vivi (modello di Housner) in corrispondenza degli impatti come mostrato nel diagramma di Fase in Figura 3.5a. La soluzione analitica rivela un brusco salto nella velocità angolare al momento dell'impatto, completamente determinato dal coefficiente di restituzione e del valore del passo temporale usato dt nel modello numerico.

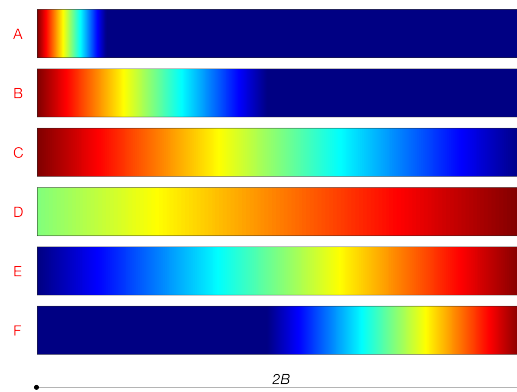


Figura 3.6: Contour plots della pressione di contatto relativa al caso di blocco secondo il modello di Housner: il diagramma in falsi colori mostra la variazione del contatto nei 6 istanti considerati, dal rosso (massima pressione di contatto) al blu (assenza di contatto)

La distribuzione della pressione di contatto relativa al caso di blocco oscillante a

spigoli vivi (si veda Figura 3.6) ottenuta numericamente nell'ipotesi di una distribuzione lineare della pressione contatto all'interfaccia tra il blocco e la base mostra una evoluzione differente rispetto alla soluzione numerica ottenuta implementando il modello analitico. In particolare, si evidenzia un'evoluzione significativa della pressione di contatto a partire dall'istante (B) rispetto alla condizione iniziale (A). Il primo impatto si verifica tra i punti (C) e (D), dove la pressione di contatto si distribuisce in modo ampio su una porzione consistente dell'interfaccia, con i picchi massimi localizzati agli angoli opposti. Dall'istante (E) in poi, le due soluzioni tendono a convergere nuovamente.

Sebbene le due soluzioni siano generalmente in accordo, è doveroso osservare che la seconda soluzione numerica riesca a monitorare in maniera progressiva l'evoluzione dell'impatto rispetto alla prima ottenuta con il modello analitico che si basa sull'ipotesi di soli due punti di contatto distinti.

3.1.3.2. Confronto degli spettri di risposta relativi al blocco a spigoli raccordati

Sebbene il blocco a spigoli raccordati possa resistere al movimento del terreno senza ribaltarsi, le elevate rotazioni e accelerazioni angolari associate al moto oscillatorio possono comunque arrecare danni significativi.

L'analisi dimensionale consente quindi di normalizzare l'angolo di inclinazione θ mediante i parametri di snellezza α . Questo approccio permette di tracciare le curve di ribaltamento dei valori massimi dell'angolo di inclinazione normalizzato θ_{max}/α nel piano definito da $(a_p/g \tan \alpha)$ e ω_p/p , mantenendo costante la snellezza e variando i parametri di curvatura (ρ). Questi grafici sono comunemente noti come spettri di oscillazione o spettri di ribaltamento.

Nelle Figure 3.7 e 3.8 sono riportati gli spettri di risposta di oscillazione massima relativi ai blocchi di tipo $B2^c$ ($p = 1.68 [s^{-1}]$), ossia con raccordi alla base, sottoposti a eccitazioni trigonometriche di tipo seno e coseno. La snellezza della colonna usata per calcolare gli spettri di oscillazione è $\alpha = 0.25 [rad]$. Le Figure mostrano l'angolo di inclinazione $\theta_{max}/\alpha = \max(|\theta|)/\alpha$ derivato da un totale di 87.500 analisi della risposta non lineare nel dominio temporale (350x250) per ogni analisi condotta al variare del raccordo adimensionale ρ in un range di valori crescenti [0, 0.10, 0.15, 0.25, 0.30, 0.45]. I grafici sono adimensionali, in linea con la teoria della similitudine: l'asse delle ascisse rappresenta la frequenza dell'impulso ω_p normalizzata rispetto al

parametro di frequenza p , mentre l'asse delle ordinate mostra l'ampiezza dell'impulso a_p normalizzata rispetto all'accelerazione di sollevamento $\ddot{u}_{g,up}$.

Infine, le Figure 3.9 e 3.10 mostrano uno studio degli spettri, al variare del raggio ρ da sinistra verso destra e al variare del parametro di snellezza α dall'alto verso il basso.

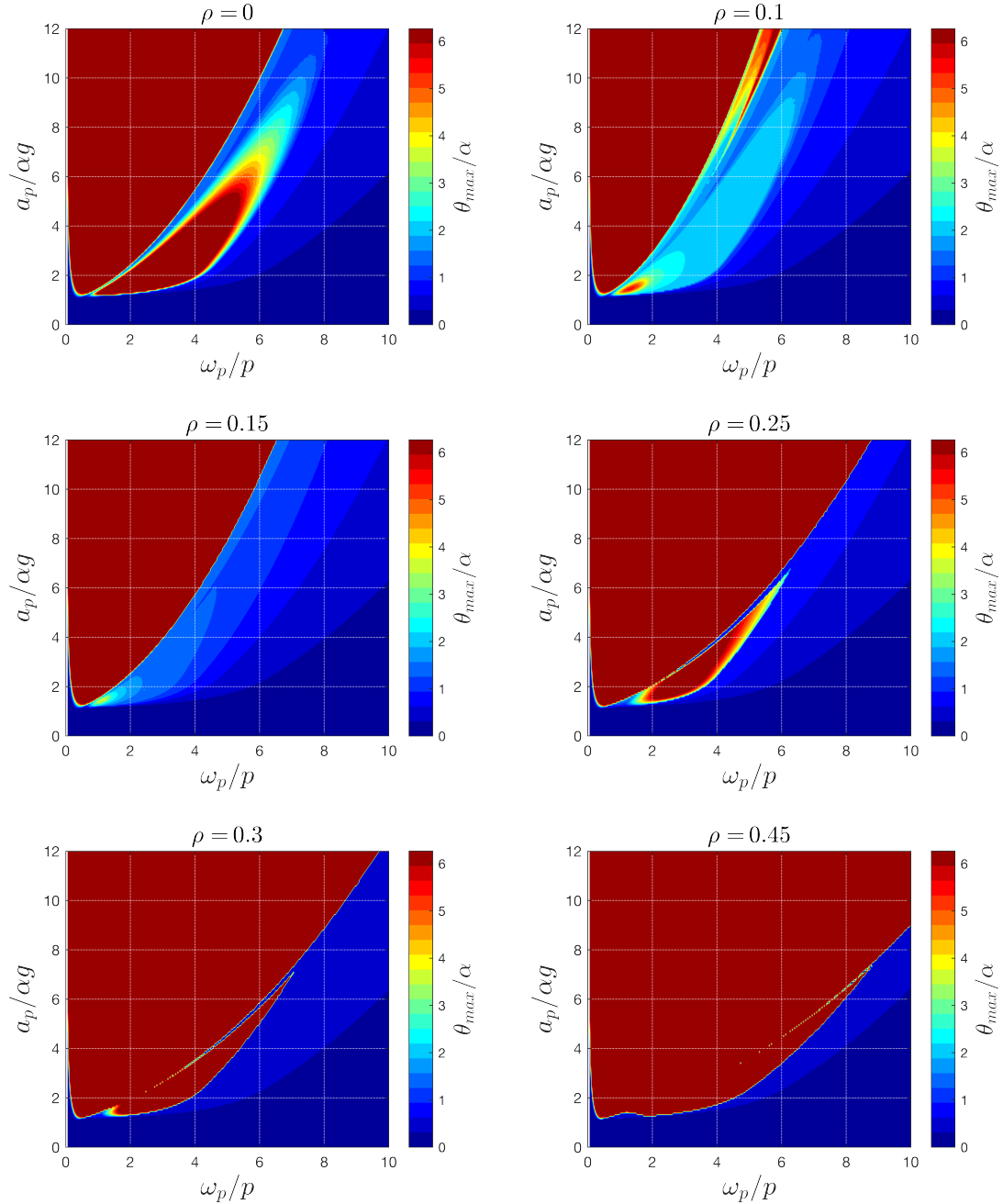


Figura 3.7: Spettri di oscillazione (rotazione massima alla base, θ/α) del blocco a spigoli raccordati oscillante con diversi valori ρ (0, 0.10, 0.15, 0.25, 0.30, 0.45) soggetto ad un impulso sinusoidale

L'analisi degli spettri di risposta in relazione all'angolo massimo di oscillazione permette di formulare le seguenti significative osservazioni:

- All'aumentare del raggio normalizzato di curvatura ρ , in un range di valori compreso tra $[0.00 \text{ e } 0.15]$, si osserva una drastica riduzione del modo 1 (ribaltamento dopo il primo impatto) con conseguente aumento positivo delle zone di sicurezza (blu). Al contrario, nel range di valori di ρ $[0.25 - 0.45]$ si osserva un notevole incremento del modo 2 (ribaltamento senza impatto) anche per impulsi caratterizzati da frequenze ω_p/p alte e basse ampiezze di accelerazione $a_p/\alpha g$ rendendo il blocco molto più instabile.
- Impulsi prolungati ($\omega_p/p \leq 4$): Quando l'oscillatore è esposto a impulsi di lunga durata, il rischio di ribaltamento è elevato, specialmente durante le fasi di sollevamento. Questo fenomeno si verifica perché l'accelerazione perdura abbastanza a lungo da far sì che la forza esercitata sull'oscillatore si comporti in maniera analoga a una forza statica. Di conseguenza, una volta superata la resistenza dell'oscillatore, il ribaltamento diventa praticamente inevitabile;
- Quando l'angolo massimo di inclinazione ($4 \leq \theta_{max}/\alpha \leq 6$) si avvicina al limite critico di ribaltamento, si osserva un aumento significativo dello spettro di risposta. Questo indica una fase di alta vulnerabilità, in cui l'oscillatore mostra una maggiore reattività alle sollecitazioni applicate;
- Per $\omega_p/p \leq 8$ il ribaltamento può essere evitato con sicurezza finché l'ampiezza dell'accelerazione rimane inferiore a $4g \tan \alpha$, cioè fino a quattro volte l'accelerazione del sollevamento. Questo comportamento indica che l'oscillatore mantiene una risposta stabile in queste condizioni, senza rischio di ribaltamento.
- Per sollecitazioni cosenoidali, resta sempre chiara la separazione tra zone di ribaltamento senza impatto e dopo il primo impatto.

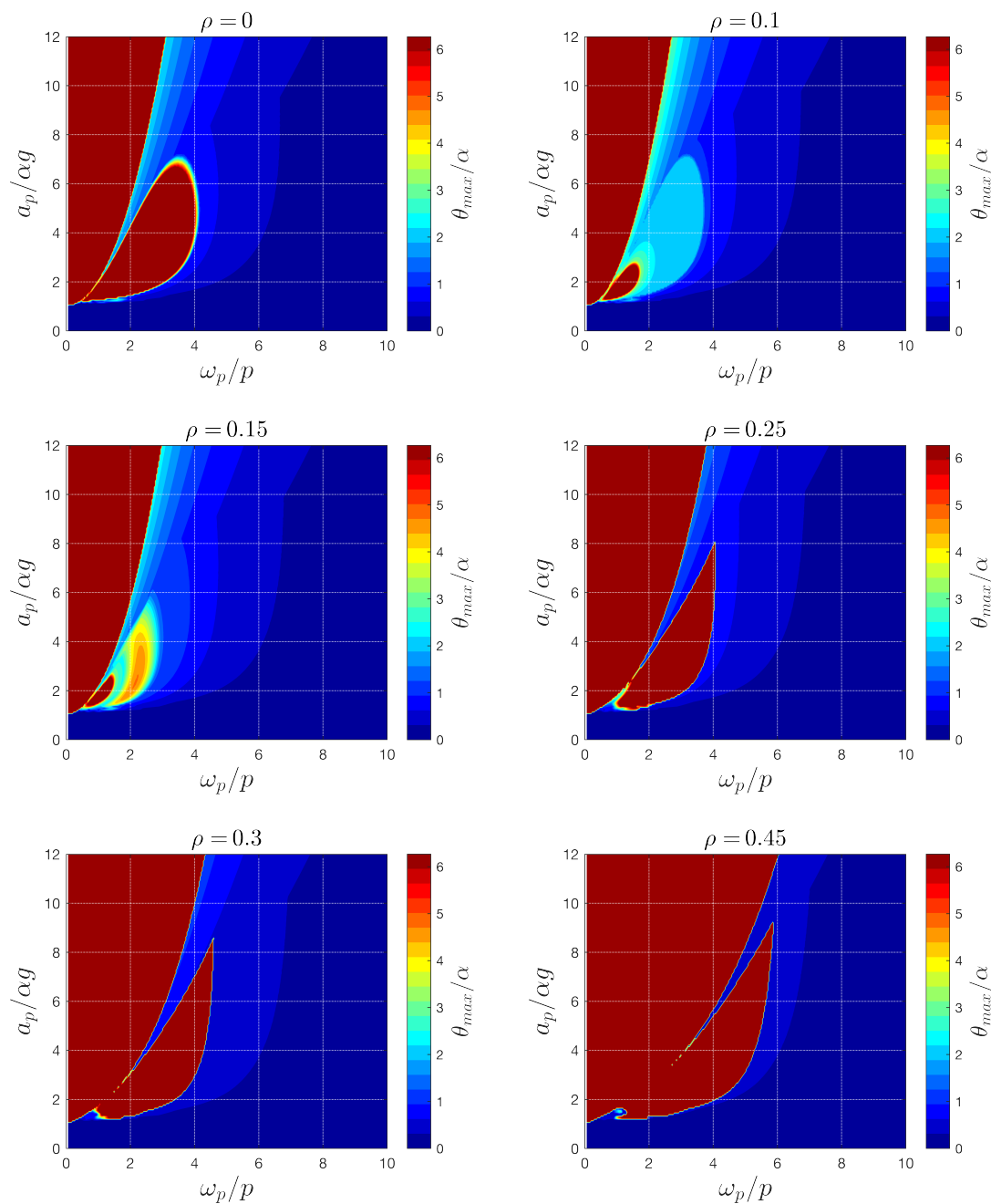


Figura 3.8: Spettri di oscillazione (rotazione massima alla base, θ/α) del blocco a spigoli raccordati oscillante con diversi valori ρ (0, 0.10, 0.15, 0.25, 0.30, 0.45) soggetto ad un impulso cosenoidale

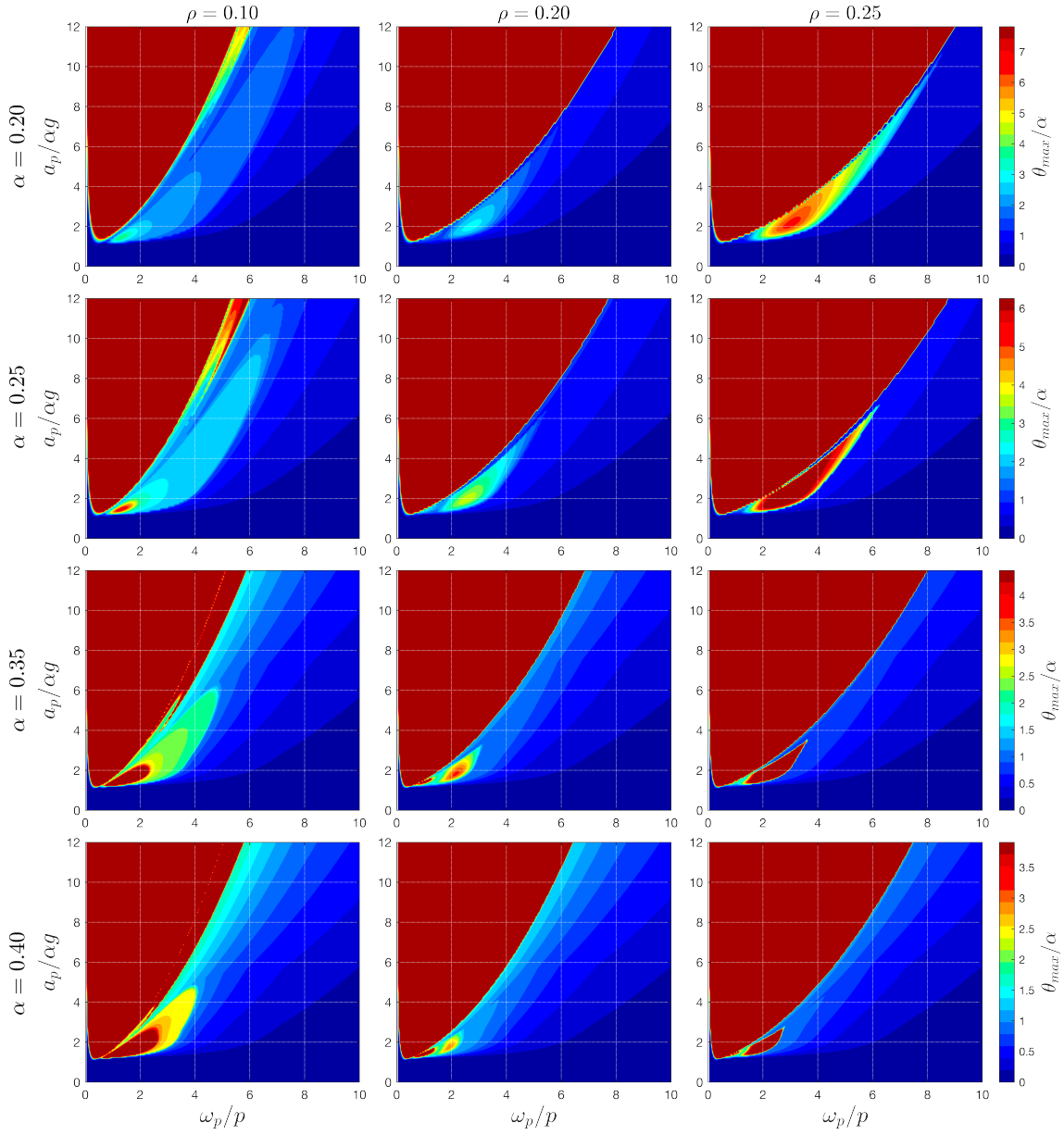


Figura 3.9: Spettri di oscillazione (rotazione massima alla base, θ/α) del blocco a spigoli raccordati oscillante con diversi valori ρ e snellezza α , soggetto ad un impulso sinusoidale

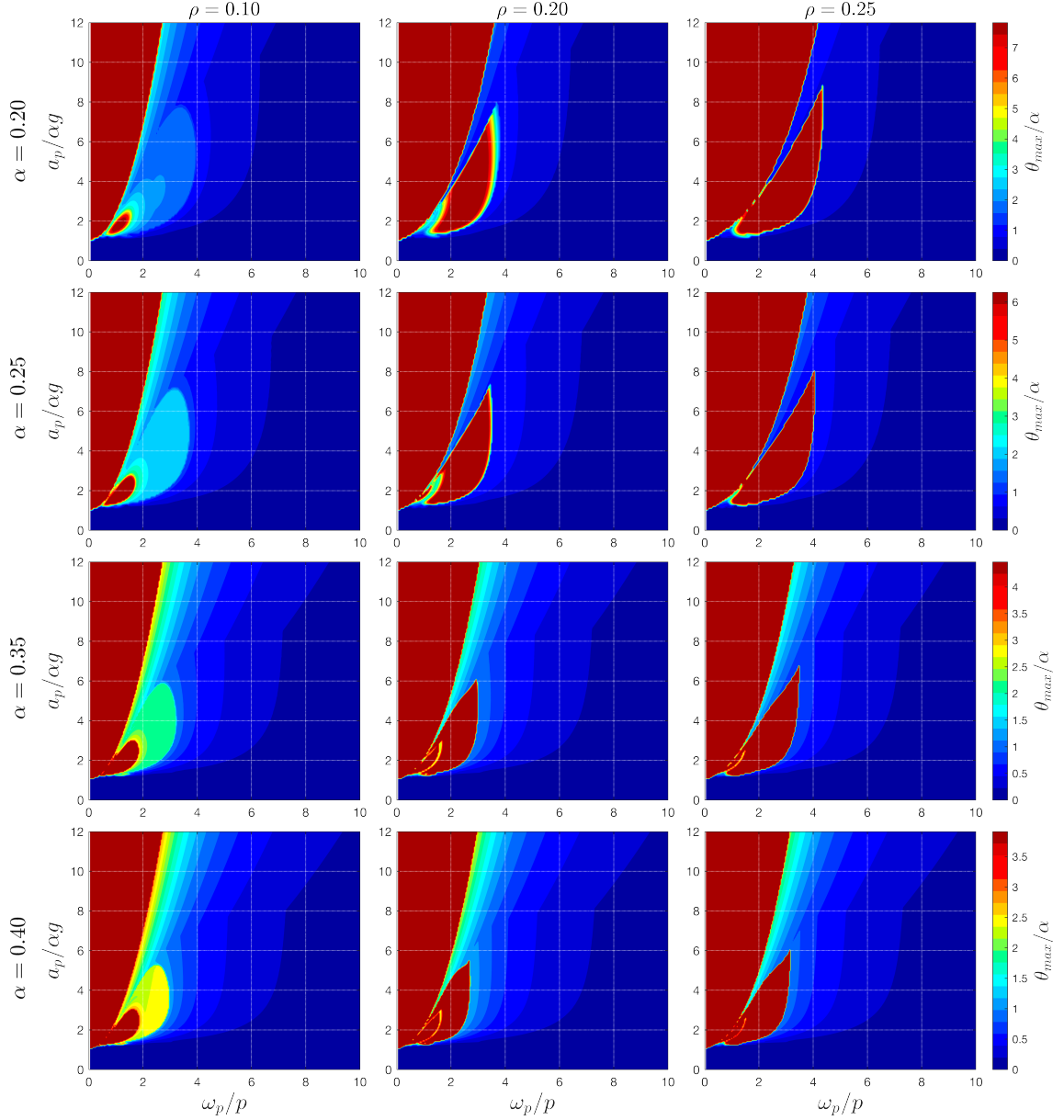


Figura 3.10: Spettri di oscillazione (rotazione massima alla base, θ/α) del blocco a spigoli raccordati oscillante con diversi valori ρ e snellezza α , soggetto ad un impulso cosenoidale

3.1.4. Soglie di risposta dinamica e stabilità strutturale

Sebbene in Letteratura, come riportato in [19], il piano degli spettri è spesso suddiviso in tre aree principali: ribaltamento senza impatto, ribaltamento con impatto e nessun ribaltamento, tuttavia, per concentrare l'attenzione sulla probabilità di ribaltamento, in questo studio lo spettro di accelerazione di ribaltamento viene semplificato in due sole zone: quella di ribaltamento e quella di sicurezza.

Lo spettro tridimensionale di ribaltamento si ottiene estendendo lo spettro di accelerazione, aggiungendo un terzo asse che rappresenta il picco della rotazione oscillante normalizzato ($|\theta_{max}|/\alpha$), come illustrato nelle Figure 3.11 e 3.12. Da questa rappresentazione, si nota che il picco di rotazione è strettamente legato all'accelerazione di ribaltamento. Inoltre, si evidenzia che il picco di rotazione non dipende unicamente dal rapporto ω_p/p , ma anche da $a_p/g \tan \alpha$, grandezze comunemente usate per misurare l'intensità.

Per questo motivo, in accordo con l'Equazione (3.15),

$$\frac{|\theta_{max}|}{\alpha} = \Phi \left(\frac{\omega_p}{p}, \frac{a_p}{g\alpha}, \eta \right) \quad (3.15)$$

il picco massimo di rotazione, normalizzato rispetto alla snellezza α , è adottato come parametro di misura [61] :

$$PM = \frac{|\theta_{max}|}{\alpha} \quad (3.16)$$

L'interpretazione fisica di questo parametro adimensionale, è chiara: valori superiori a zero indicano l'inizio dell'oscillazione, mentre valori elevati (ad esempio $PM > 1.5$) segnalano il ribaltamento causato dall'oscillazione.

Le Figure 3.11 e 3.12 illustrano tre scenari distinti: (i) le simulazioni "non rocking" (rappresentate da indicatori di colore blu), che si verificano quando l'accelerazione di picco al suolo è inferiore alla soglia minima necessaria per innescare il movimento oscillante (Equazione (2.10)) e quindi la struttura rimane ferma; (ii) le simulazioni di "oscillazione sicura" ("safe rocking" rappresentati da indicatori di colore verde), in cui la struttura inizia a oscillare ma non ribalta; e (iii) le simulazioni di "ribaltamento" ("overturning" rappresentati da indicatori di colore rosso). Si ricorda che una struttura oscillante diventa instabile dal punto di vista statico quando il PM raggiunge o supera 1.0, poiché, a causa della natura altamente non lineare della dinamica del moto rocking, ($PM \geq 1.0$) non implica automaticamente il ribaltamento. Anzi, la struttura può esibire rotazioni $|\theta_{max}|$ notevolmente superiori ad α senza ribaltarsi, comportamento in contrasto con il classico punto di vista quasi statico della risposta sismica. Il ribaltamento si manifesta quando il sistema diventa dinamicamente instabile, causando una risposta che tende all'infinito. Pertanto, la soglia di ribaltamento non è definita da un particolare valore di rotazione (ad esempio, $PM = 1.5$), ma piuttosto da un valore di $PM \rightarrow \infty$.

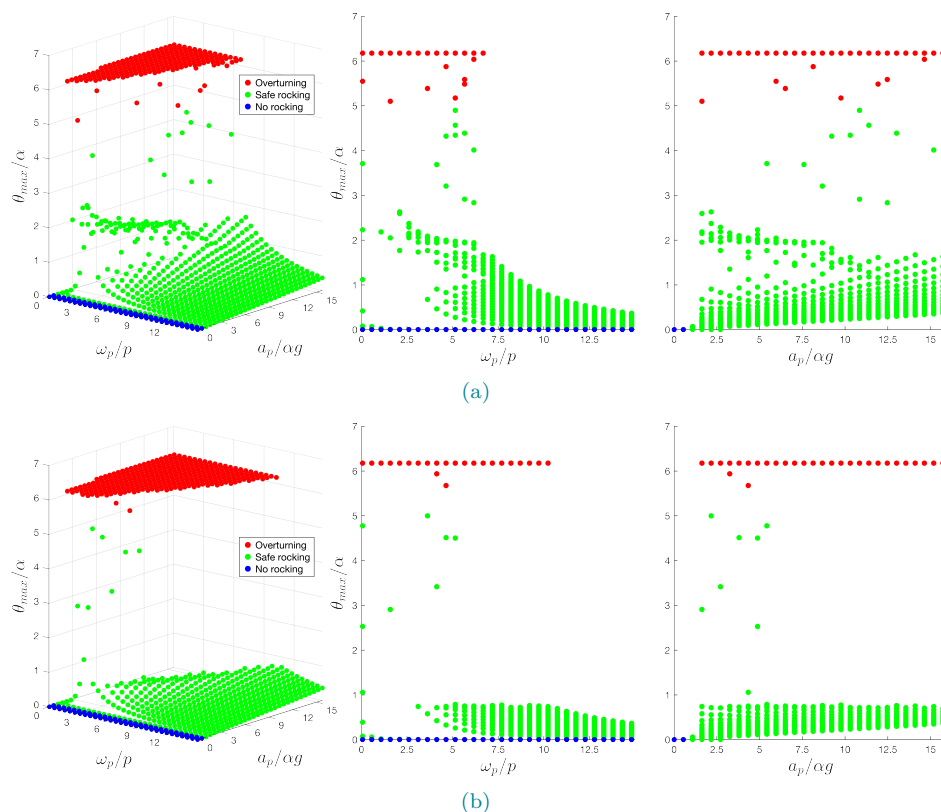


Figura 3.11: Spettro di oscillazione 3D per un blocco con $\alpha = 0.25$ [rad], $p = 1.68$ [s^{-1}] al variare di $\rho = [0.10, 0.25]$, soggetto ad impulso sinusoidale

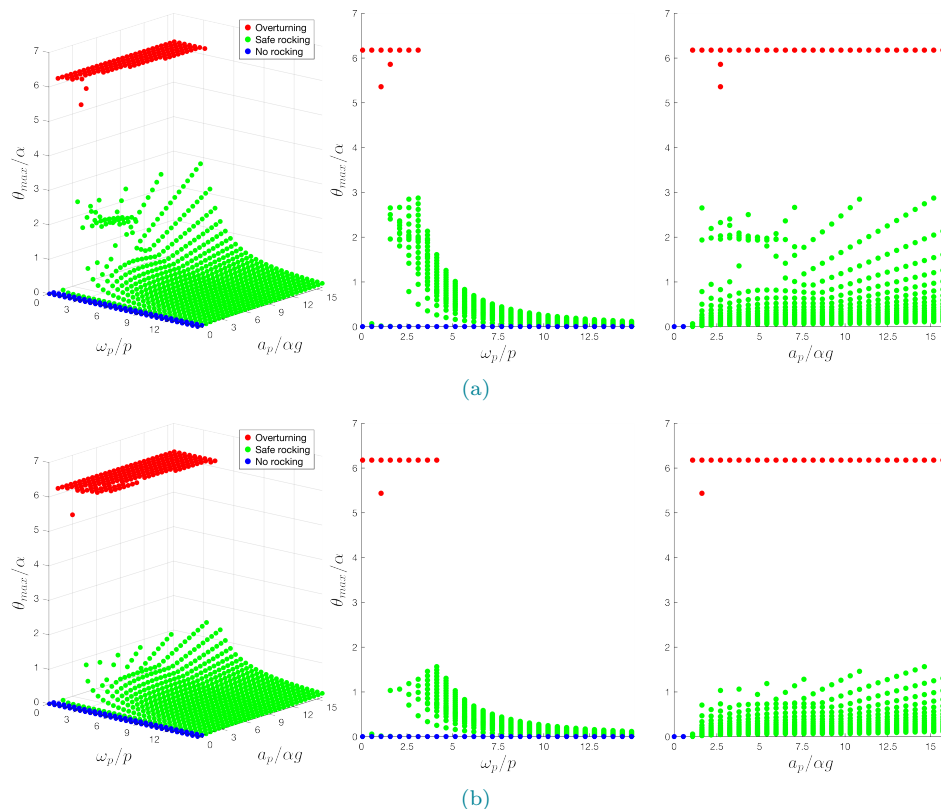


Figura 3.12: Spettro di oscillazione 3D per un blocco con $\alpha = 0.25$ [rad], $p = 1.68$ [s^{-1}] al variare di $\rho = [0.10, 0.25]$, soggetto ad impulso cosenoidale

4 | UN NUOVO APPROCCIO TEORICO ALLO STUDIO DELLA MECCANICA DELL'IMPATTO NELLA DINAMICA DEL ROCKING DELLE STRUTTURE MULTIBLOCCO IN MURATURA

L'impatto è uno dei fenomeni più comuni e complessi nel campo della dinamica. Una modellazione meccanica accurata dell'impatto è fondamentale in diversi campi di applicazione dell'Ingegneria: dalla biomeccanica alla robotica, dalla meccanica applicata alle macchine all'analisi strutturale.

Sin dai contributi scientifici di I. Newton, la Letteratura ha esplorato ampiamente la fenomenologia del contatto proponendo numerose formulazioni teoriche alla risoluzione del problema.

In questo capitolo partendo dai due approcci teorici usualmente impiegati in Letteratura per lo studio dell'impatto nella dinamica dei blocchi oscillanti, ossia il modello di Housner e il modello di fondazione deformabile alla Winkler, si è cercato di rispondere a due quesiti importanti.

Il primo quesito riguarda la possibilità di includere nel modello le proprietà meccaniche dei materiali costituenti i blocchi. Questa considerazione scaturisce dalle incongruenze tra le evidenze sperimentali nonché dalle osservazioni della fenomenologia del rocking nei casi reali e i risultati ottenuti dai classici modelli teorici che considerano i blocchi oscillanti "rigidi".

Il secondo quesito invece riguarda la scelta del coefficiente di restituzione (CoR) da adottare nel modello, considerando l'impatto come un processo suddiviso in due fasi principali: "compressione" e "restituzione".

Si sostiene che entrambi i quesiti posti sono centrali per sviluppare una comprensione più accurata e applicabile del fenomeno dell'impatto nei sistemi reali.

Per rispondere a tali richieste è stato sviluppato un nuovo modello analitico che consente di descrivere accuratamente il contatto durante la fase di impatto tenendo conto localmente della deformabilità dei due blocchi impattanti. Il modello proposto è stato ulteriormente implementato in un sofisticato ambiente di simulazione numerica utilizzando MATLAB. L'implementazione numerica ha permesso di verificare la validità del modello proposto confrontando i risultati numerici con quelli ottenuti dalla campagna sperimentale descritta nel capitolo 5, nonché di esplorare scenari complessi, fornendo risultati utili per migliorare la comprensione dell'impatto nella dinamica rocking dei sistemi multiblocco anche caratterizzati da geometrie più articolate come triliti e archi.

4.1. MODELLO TEORICO PROPOSTO

4.1.1. Teoria dell'impatto

L'impatto rappresenta un fenomeno in cui un sistema costituito da due o più corpi entra in contatto per un intervallo di tempo estremamente breve, generando diverse risposte in base alle proprietà dei materiali, alla geometria dei corpi coinvolti e alle condizioni iniziali dei corpi stessi. Lo studio di tali sistemi, noti come sistemi dinamici multicorpo, si concentra sull'analisi delle interazioni tra i corpi, influenzate dai vincoli cinematici e dalle forze esterne applicate. I sistemi multicorpo possono quindi essere descritti come insiemi di corpi multipli in cui il movimento relativo, causato dall'applicazione di forze esterne, è limitato dai vincoli cinematici presenti [62, 63].

Le prime indagini su questo argomento risalgono a oltre un secolo fa, ma continuano ad avere un'importanza cruciale sia nella ricerca contemporanea che nelle applicazioni ingegneristiche. Le applicazioni della dinamica multicorpo e degli impatti spaziano dalla modellazione delle strutture nel campo dell'Ingegneria Civile, come segmenti di ponti [64–67] o edifici vicini tra loro [68], fino alla simulazione dell'impatto nei materiali granulari utilizzando il metodo degli elementi discreti (DEM: Discrete Element Method) [69].

Al giorno d'oggi, una delle principali sfide della ricerca è identificare il modello meccanico più idoneo per analizzare un sistema di impatto, data l'influenza significativa

delle geometrie, dei materiali e della cinematica dei corpi coinvolti [70]. Altre difficoltà includono la stima accurata dei parametri di contatto[71] e la valutazione del trasferimento di energia durante l'impatto [72].

Il primo approccio all'analisi dell'impatto fu introdotto da Hertz [73], che propose un modello basato su una molla lineare completamente elastica, priva di dissipazione energetica. Nel corso del tempo, sono stati sviluppati diversi altri modelli per determinare il coefficiente di restituzione, l'impulso e la dissipazione energetica, basandosi sulle leggi di Newton. Questi sviluppi hanno portato alla creazione di modelli più sofisticati, come quelli che considerano la deformabilità e i modelli non lineari. Esistono anche due approcci numerici impiegati nei codici di calcolo agli elementi finiti che utilizzano il metodo delle funzioni di penalità (Penalty function) e quello dei moltiplicatori lagrangiani, applicabili principalmente in presenza di nodi multipli e sono generalmente utilizzati per modellare impatti tra corpi deformabili. Il fenomeno dell'impatto può essere sinteticamente descritto come la situazione in cui due corpi, inizialmente in prossimità, si avvicinano l'uno all'altro con una velocità relativa, nota come velocità di pre-impatto, fino a entrare in collisione. Questo processo provoca una riduzione graduale della velocità dei corpi, che si annulla al termine della fase di compressione, momento in cui la forza di contatto raggiunge il suo massimo effetto, portando alla massima indentazione tra i corpi. Inizia così la fase di espansione, durante la quale l'energia accumulata nella fase precedente spinge i due corpi a separarsi. Tuttavia, non tutta l'energia viene restituita: una parte viene persa a causa di fenomeni di smorzamento interno [74], manifestandosi sotto forma di vibrazioni, calore, suono e altre dispersioni energetiche [75]. Anche nel caso di collisioni apparentemente perfettamente elastiche, si osserva una perdita di energia dovuta alla conversione dell'energia cinetica iniziale in vibrazioni interne subito dopo il contatto [76]. Di conseguenza, i modelli elastici originariamente proposti sono stati rivisti e ampliati per tener conto del fenomeno della dissipazione energetica. Nonostante le numerose evoluzioni a cui il modello di impatto con dissipazione di energia è stato sottoposto, il coefficiente di restituzione (CoR) rimane ancora un parametro cruciale nella regolazione di tale dissipazione. Il CoR può essere definito come il rapporto tra la velocità relativa post-impatto e quella pre-impatto, offrendo una misura diretta dell'efficienza del processo di restituzione energetica nel corso dell'impatto.

Cinematica del contatto

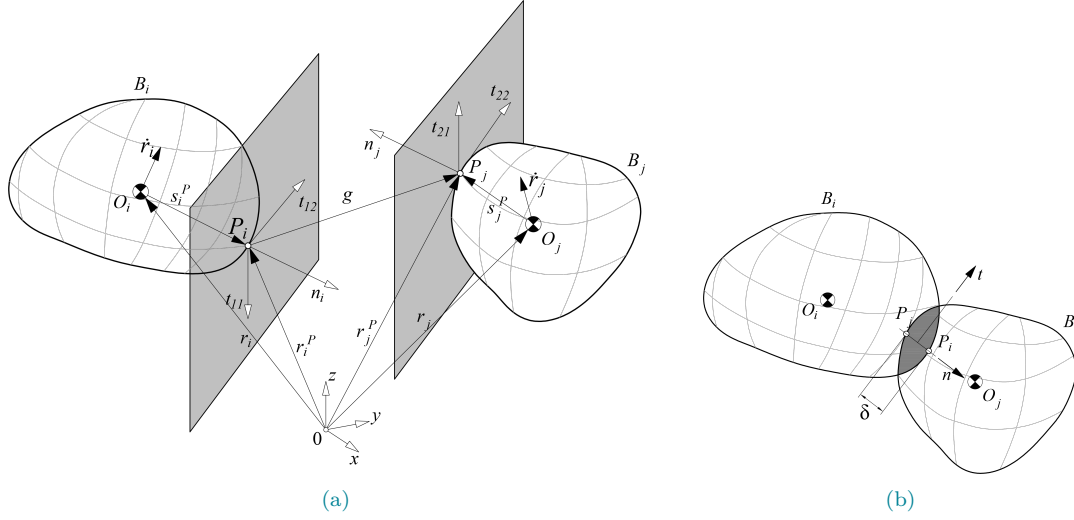


Figura 4.1: (a) Corpi in stato di separazione; (b) corpi in stato di contatto (indentazione δ)

La cinematica del contatto tra due corpi rigidi piani, soggetti a possibili impatti, viene analizzata con particolare enfasi sui momenti di separazione e avvicinamento. Come illustrato nella Figura 4.1a, i due corpi convessi, denominati rispettivamente B_i e B_j , si trovano in uno stato di separazione e si muovono con velocità assolute indicate come $\dot{\mathbf{r}}_i$ e $\dot{\mathbf{r}}_j$. I potenziali punti di contatto su ciascun corpo sono rappresentati da P_i e P_j [71]. Per comprendere la cinematica del contatto, è necessario determinare tre grandezze fondamentali: la posizione dei punti di contatto potenziali, la loro distanza euclidea e la velocità normale relativa [77, 78]. Queste grandezze sono fondamentali per calcolare le forze di contatto che emergono durante un evento di impatto [79, 80]. Quando la velocità normale relativa tra i punti di contatto è positiva, i corpi si stanno avvicinando, il che indica la "fase di compressione". Al contrario, una velocità normale relativa negativa suggerisce che i corpi si stanno allontanando, corrispondente alla "fase di restituzione". La Figura 4.1 rappresenta i vettori chiave utilizzati nello studio del contatto e dell'impatto. Il vettore che collega i due potenziali punti di contatto, P_i e P_j , può essere descritto attraverso una funzione gap, definita come [81]:

$$\mathbf{g}_N = \mathbf{n}_1^T \mathbf{g} = -\mathbf{n}_2^T \mathbf{g} = \mathbf{n}_1^T (\mathbf{r}_j^P - \mathbf{r}_i^P) \quad (4.1)$$

In questo contesto, $\mathbf{r}_i^P$ e $\mathbf{r}_j^P$ sono espressi in coordinate globali relative al sistema di riferimento inerziale:

$$\mathbf{r}_k^P = \mathbf{r}_k + \mathbf{A}_k \mathbf{s}'_k^P \quad (k = i, j) \quad (4.2)$$

dove $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{r}_j$ sono i vettori di posizione globale dei corpi i e j , mentre $\mathbf{s}'_i^P$ e $\mathbf{s}'_j^P$ rappresentano le componenti locali dei punti di contatto nei rispettivi sistemi di coordinate locali. Le matrici di trasformazione rotazionale $\mathbf{A}_k$ si esprimono come [81, 82]:

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \cos \phi_k & -\sin \phi_k \\ \sin \phi_k & \cos \phi_k \end{bmatrix} \quad (k = i, j) \quad (4.3)$$

Un vettore normale al piano di contatto, illustrato in Figura 4.1, è determinato come:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}}{g} \quad (4.4)$$

dove la grandezza del vettore $\mathbf{g}$ è determinata come:

$$g = \mathbf{n}^T \mathbf{g} \quad (4.5)$$

La sola condizione di minima distanza data dall'Equazione (4.5), tuttavia, non è sufficiente per identificare i punti di contatto tra i corpi, poiché non copre tutti i possibili scenari di contatto. Per questo motivo, i punti di contatto vengono definiti come quelli in corrispondenza della massima deformazione relativa, ovvero i punti di massima indentazione lungo la direzione normale [83]. Si possono così definire tre condizioni geometriche per il contatto:

1. La distanza tra i potenziali punti di contatto, rappresentata dal vettore $\mathbf{g}$, deve essere la minima possibile;
2. Il vettore $\mathbf{g}$ deve essere collineare con il vettore normale $\mathbf{n}_i$;
3. I vettori normali $\mathbf{n}_i$ e $\mathbf{n}_j$ nei punti di contatto devono essere collineari.

Le condizioni (ii) e (iii) possono essere espresse tramite i seguenti prodotti [84]:

$$\mathbf{n}_j \times \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{g} \times \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

Le condizioni geometriche, rappresentate dalle Equazioni (4.6) e (4.7), costituiscono un sistema di Equazioni non lineari con due incognite, che può essere risolto uti-

lizzando una procedura iterativa di Newton-Raphson. Questo sistema permette di determinare la posizione esatta dei punti di contatto potenziali. Una volta identificati questi punti, si procede alla valutazione dell'indentazione relativa tra i corpi a contatto [85]:

$$\delta = \sqrt{\mathbf{g}^T \mathbf{g}} \quad (4.8)$$

Le velocità nei punti di contatto, espresse nel sistema di coordinate globale, sono ottenute derivando l'Equazione (4.2) rispetto al tempo:

$$\dot{\mathbf{r}}_k^P = \dot{\mathbf{r}}_k + \dot{\mathbf{A}}_k \mathbf{s}'_k^P \quad (k = i, j) \quad (4.9)$$

La velocità normale relativa si determina proiettando la velocità di contatto sulla direzione normale al piano di contatto, ottenendo:

$$v_N = \dot{\delta} = \mathbf{n}^T (\dot{\mathbf{r}}_j^P - \dot{\mathbf{r}}_i^P) \quad (4.10)$$

4.1.2. Il Coefficiente di Restituzione

Il coefficiente di restituzione (CoR) è un parametro cruciale e spesso oggetto di discussione nell'analisi della dinamica dell'impatto [86]. Questo coefficiente fornisce una misura essenziale per descrivere la velocità finale, gli impulsi normali e l'energia cinetica dei corpi coinvolti in un impatto. Nonostante la sua apparente semplicità, il CoR cattura la complessità delle dinamiche in gioco durante una collisione e può essere utilizzato per correlare vari parametri relativi alla dissipazione energetica [87]. Tuttavia, una modellazione accurata delle collisioni richiede la validazione mediante il confronto con risultati sperimentali per comprendere appieno le diverse forme di dissipazione [80]. La perdita di energia durante una collisione può essere attribuita a fattori come proprietà di rigidità dei materiali, attrito e lavoro svolto nella deformazione dei corpi in contatto [88]. Ulteriori fonti di dissipazione energetica includono onde di propagazione, che si originano nel punto o sulle superfici di contatto e si diffondono attraverso i materiali a velocità finite. Queste onde sono più comuni negli impatti tra corpi di dimensioni e materiali differenti [75, 88]. Un'altra forma di dissipazione energetica è la plasticità o deformazione plastica, che lascia deformazioni permanenti nella regione di contatto. Altre perdite possono derivare dallo smorzamento interno dei materiali stessi, oppure in altre forme, come calore o

suono. In generale, la perdita di energia può essere attribuita a due fonti principali: proprietà locali della collisione e vibrazioni. Le deformazioni locali causano una perdita permanente di energia, mentre le vibrazioni possono portare a una perdita parziale, ma recuperabile nel tempo [86].

Il coefficiente di restituzione, CoR , è dunque una costante fondamentale utilizzata per quantificare la perdita di energia negli impatti. Nelle collisioni perfettamente elastiche, $\eta = 1$, indica un pieno recupero dell'energia dopo l'impatto; nelle collisioni perfettamente plastiche $\eta = 0$, indica che la massima quantità di energia viene persa come risultato della collisione. Inoltre, per gli urti anelastici, $0 \leq \eta \leq 1$, l'energia viene solo parzialmente recuperata.

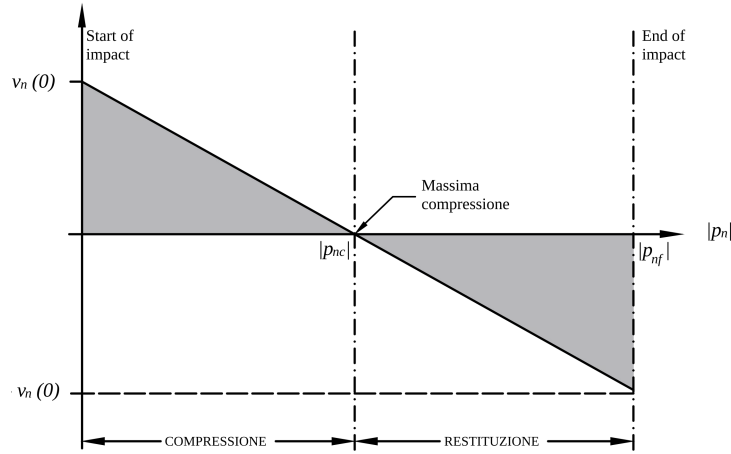


Figura 4.2: Propagazione della velocità normale per l'impatto di un singolo punto

È tuttavia necessario evidenziare che, tale parametro può essere descritto attraverso tre definizioni chiave: la definizione Newtoniana (cinematica)[80, 89], la definizione di Poisson (cinetica o impulsiva)[90], e la definizione di Stronge (energetica)[91]. Queste offrono una struttura per comprendere e applicare il coefficiente in vari contesti. La definizione newtoniana, ad esempio, mette in relazione il rapporto delle velocità relative normali, prima e dopo l'impatto, sottolineando la dipendenza dalle proprietà dei materiali dei corpi in collisione. Un noto confronto tra i tre modelli viene fatto considerando il processo di collisione in Figura 4.2 per un caso di impatto di un singolo punto. Il CoR di Newton (η_n) mette in relazione la velocità normale post-impatto con la velocità normale pre-impatto, come segue: $\eta_n = -v_n^+/v_n(0)$, con $v_n^+ = -v_n(0)$ per $\eta_n = 1$; il CoR di Poisson (η_p) mette in relazione l'impulso normale con l'impulso normale in fase di compressione come: $\eta_p = p_{nr}/p_{nc} = (p_{nf} - p_{nc})/p_{nc}$.

L'ipotesi di Stronge (η_*), invece, mette in relazione il lavoro normale in fase di restituzione con il lavoro normale in fase di compressione (area sottesa la curva in Figura 4.2) secondo la relazione: $\eta_*^2 = -W_{nr}/W_{nc}$. Si noti che la fase di compressione termina quando $v_n = 0$ per l'impatto di un singolo punto, ma ciò non è così immediato per l'impatto di più punti.

In generale, il coefficiente di restituzione dipende da vari parametri, tra cui le proprietà dei materiali [92, 93], la configurazione geometrica, le velocità iniziali, la durata della collisione e l'attrito[74]. Hunt e Crossley offrono un'altra prospettiva, definendolo come il rapporto delle velocità relative in una collisione unidimensionale tra due corpi rigidi in pura traslazione. Questo evidenzia la diversità dei fattori che influenzano il valore del coefficiente e la sua applicabilità in diversi scenari di impatto [72].

Routh ha introdotto un metodo grafico basato sulla definizione cinetica del coefficiente di restituzione per affrontare i problemi di impatto con attrito [90]. Nel suo lavoro, ha studiato e risolto casi di impatti con attrito, dove si verifica un'inversione di velocità, quando la direzione del movimento di slittamento dei corpi in collisione cambia direzione. Wang e Mason hanno utilizzato il metodo grafico di Routh per risolvere i problemi di impatti con attrito [94].

Whittaker ha ampliato il lavoro di Newton per tenere conto degli effetti dell'attrito [95]. Il suo metodo considera lo slittamento nei casi in cui il coefficiente di attrito è inferiore al rapporto tra gli impulsi normali e tangenziali. Inoltre, fornisce una soluzione algebrica combinando le definizioni cinematica e cinetica del coefficiente di restituzione, fornendo così una soluzione facile per le velocità post-impatto. Tuttavia, un limite di questo metodo risiede nel fatto che non è coerente nel caso di inversione di velocità, quando il movimento di slittamento cambia direzione.

4.1.3. Ripensare all'impatto non più come un "evento istantaneo" nella dinamica rocking

In alcuni contesti, può essere vantaggioso considerare la legge dell'impatto non come un evento istantaneo, ma come un processo che si sviluppa nel tempo. Questa prospettiva non solo fornisce una giustificazione fisica più solida, ma rende anche più agevole l'analisi di fenomeni complessi come per esempio l'attrito. Pertanto, da questo momento, la fisica dell'impatto sarà descritta non solo come una variazione di velocità, ma attraverso una legge continua di forza, che chiameremo $F(\tau)$, applicata

per tutta la durata dell'impatto, la quale non sarà più trascurabile.

La modellazione di un contatto non permanente è tradizionalmente eseguita con due metodi: i moltiplicatori di Lagrange e le funzioni di Penalità (Penalty function). L'approccio dei moltiplicatori di Lagrange assicura che il corpo impattante non penetri la superficie di supporto, ma rende complessa la descrizione continua delle forze durante l'impatto. Di conseguenza, la maggior parte delle leggi proposte utilizza il formalismo del "penalty method", che permette una rappresentazione più continua e precisa delle forze nel corso dell'intero impatto.

Durante un impatto, le forze di contatto raggiungono valori elevati e agiscono in un intervallo di tempo estremamente breve. Misurare queste forze con precisione è complesso, poiché i sensori di misura possono alterarne il comportamento, rendendo difficile tracciare l'evoluzione temporale della forza di reazione. Tuttavia, se accettiamo di non necessitare una misurazione continua delle forze, possiamo descrivere l'effetto globale dell'impatto attraverso la teoria classica degli urti, che tratta le azioni in termini di impulso. L'impulso elementare, $d\mathbf{I}$, si definisce come il prodotto della forza $\mathbf{F}$ per l'intervallo temporale infinitesimale $d\tau$:

$$d\mathbf{I} = \mathbf{F}d\tau \quad (4.11)$$

L'impulso integrato rappresenta l'integrale di un impulso tra due istanti di tempo distinti. Formalmente, si può esprimere come:

$$\mathbf{I} = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathbf{F} d\tau \quad (4.12)$$

Consideriamo ora un solido rigido all'interno di un sistema di riferimento inerziale, o in moto continuo rispetto a tale sistema, con una velocità di rotazione Ω e un baricentro G che si sposta con una velocità lineare $\mathbf{v}_G$. Il solido ha una massa m e un momento di inerzia I_G ; le Equazioni fondamentali della dinamica per una forza $\mathbf{F}$ applicata in un punto qualsiasi M del solido possono essere espresse in termini di impulso, fornendo una descrizione efficace del comportamento del sistema durante l'impatto:

$$\int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathbf{F} d\tau = m(\mathbf{v}_G(\tau_b) - \mathbf{v}_G(\tau_a)) \quad (4.13a)$$

$$\int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathbf{F} \wedge MG d\tau = I_G (\Omega(\tau_b) - \Omega(\tau_a)) \quad (4.13b)$$

Quando gli istanti τ_a e τ_b sono abbastanza vicini da poter trascurare lo spostamento del punto M , ma sufficientemente distanti da consentire una variazione significativa delle velocità rotazionali Ω e/o lineari ($\mathbf{v}_G$), si dice che il solido ha subito un impatto impulsivo, descritto dal vettore impulso:

$$\Lambda = \int_{\tau_a}^{\tau_b} F d\tau \quad (4.14)$$

In questa situazione, si può considerare il punto M come fisso e definire il momento impulsivo come:

$$\Xi_G = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathbf{F} d\tau \wedge MG \quad (4.15)$$

Pertanto, quando un corpo rigido impatta una superficie rigida in uno o più punti M_i , le Equazioni della dinamica in forma impulsiva possono essere espresse come:

$$\begin{cases} \sum_M \Lambda = m (\mathbf{v}_G^{(+)} - \mathbf{v}_G^{(-)}) \\ \sum_M \Xi_G = I_G (\Omega^{(+)} - \Omega^{(-)}) \end{cases} \quad (4.16)$$

4.1.4. Dinamica rocking di blocchi globalmente rigidi ma localmente deformabili all'interfaccia

Il focus del lavoro di ricerca proposto si concentra sulla formulazione di un nuovo approccio teorico alla risoluzione del problema dell'impatto nella dinamica rocking delle strutture multiblocco in muratura, che consideri i blocchi come globalmente rigidi, ma localmente deformabili all'interfaccia tra le superfici impattanti. Questo nuovo modello parte dalla discussione critica dei due principali approcci presenti in Letteratura: il classico modello di blocco rigido formulato da Housner (HM) [3], che descrive il moto oscillatorio attorno agli spigoli di base del blocco su una fondazione rigida; e il modello di fondazione alla Winkler (WFM) che prevede l'estensione di questo modello classico includendo una fondazione flessibile utilizzando molle elastiche lineari verticali e smorzatori per rappresentare la dissipazione al supporto. Sebbene numerose ricerche sperimentali abbiano approfondito gli aspetti dinamici di blocchi su fondazioni rigide [21, 25, 39, 44], lo studio di blocchi globalmente rigidi ma con una deformabilità localizzata all'interfaccia è stato finora meno esplorato.

Questo aspetto viene ora affrontato proponendo un nuovo modello non lineare allo studio dell'impatto nei blocchi in muratura ispirato dalla teoria dell'impatto non lineare di Lankarani e Nikravesch [79].

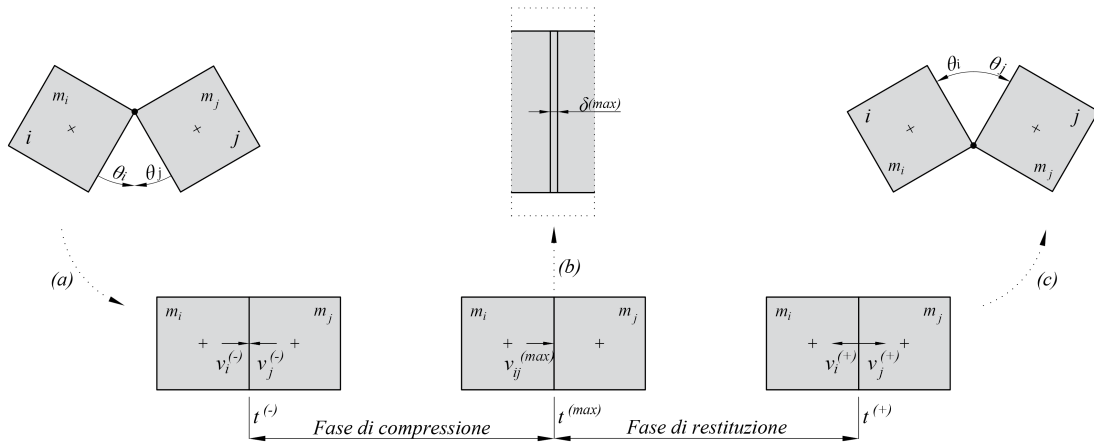


Figura 4.3: Rappresentazione dell'impatto diretto unidimensionale tra due blocchi: inizio della fase di compressione; istante di massimo indentazione δ ; termine della fase di restituzione.

Nell'approccio qui proposto, l'interazione tra le superfici a contatto durante la fase di contatto, suddivisa nelle due fasi di compressione e restituzione, viene rappresentata come un sistema di molle non lineari e smorzatori distribuiti lungo la base del blocco. Questo consente di modellare la deformazione locale che si verifica durante il contatto tra il blocco globalmente rigido e una base di appoggio (o anche un altro blocco) e al tempo stesso, di tener conto degli effetti dissipativi dovuti alle proprietà meccaniche dei materiali interagenti. Questo concetto di deformabilità localizzata permette di considerare in modo più accurato anche l'interazione dinamica tra una colonna libera e la sua base di appoggio, particolarmente importante quando il materiale di tale base gioca un ruolo cruciale nel comportamento dinamico del sistema. A supporto di questo modello, è stata condotta una campagna sperimentale presso il Laboratorio Ufficiale Prove Materiali "M. Salvati" del Politecnico di Bari, con l'obiettivo di verificare la validità delle ipotesi assunte. Le prove sperimentali sono state eseguite su modelli in scala ridotta costituiti da blocchi di cemento con diversi rapporti di snellezza, appoggiati su basi rigide e flessibili. I risultati sperimentali hanno confermato che il modello non lineare proposto descrive accuratamente il comportamento oscillatorio dei blocchi globalmente rigidi ma localmente deformabili all'interfaccia, sia in termini di evoluzione temporale del moto che di energia dissipata durante gli impatti.

Un aspetto particolarmente rilevante di questo nuovo modello meccanico riguarda la considerazione del tempo di contatto finito tra il blocco e la base durante gli impatti. Contrariamente a molti modelli teorici precedenti che considerano il contatto come un fenomeno istantaneo ($t_c \approx 0$), nell'approccio proposto viene introdotto un tempo di contatto finito, seppur breve, che permette una stima più accurata della dissipazione di energia attraverso le deformazioni localizzate all'interfaccia. Ciò consente di descrivere meglio il comportamento del sistema durante impatti multipli, inclusi gli effetti della distribuzione delle forze di contatto e degli impulsi durante l'intervallo di contatto, ottenuta attraverso una integrazione delle forze normali nei punti di impatto per un periodo di tempo $t_c \neq 0$.

Il modello proposto, formulato utilizzando coordinate generalizzate (x_G, y_G, θ) per descrivere la dinamica del blocco, è governata da un insieme di Equazioni differenziali, date da:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G(t) = F_\tau(t) \\ m\ddot{y}_G(t) = F_n(t) - mg \\ I_G\ddot{\theta}(t) = M_\tau(t) + M_n(t) \end{cases} \quad (4.17)$$

dove $F_\tau(t)$ e $F_n(t)$ sono le componenti della forza risultante lungo le direzioni orizzontale e verticale dell'interfaccia di contatto, rispettivamente, g è l'accelerazione di gravità, $M_\tau(t)$ e $M_n(t)$ sono i momenti attorno al centro di massa del blocco derivanti da $F_\tau(t)$ e $F_n(t)$, rispettivamente.

Se consideriamo uno scenario in cui il blocco sta ruotando attorno al punto O' immediatamente prima dell'impatto con la superficie, al momento iniziale $t^{(-)}$ dell'impatto, lo stato di moto del blocco corrisponde a $\dot{\theta}(t^{(-)}) < 0$. Sulla base della cinematica del blocco rigido, il campo di velocità normale sulla superficie d'impatto è dato dalla relazione: $v^n(\zeta, t) = \dot{\theta}(t)\zeta \leq 0$, con ζ punto appartenente alla base del blocco.

Siano l'evento d'impatto iniziale e finale, rispettivamente, $t_0 = 0$ e t_f . Si noti che il tempo finale t_f è incognito e dovrà essere determinato. Durante l'analisi numerica, in questo studio è stato impiegato un incremento di tempo costante $dt = 1.0 \cdot 10^{-6}$ s. A qualsiasi tempo fittizio t , la deformazione o pseudo-penetrazione può essere determinata tramite la seguente Equazione con la condizione iniziale $\delta(t_0) = 0$:

$$\delta = \frac{[f_1(q) + f_1^{(-)}(q)] + [f_2(q) + f_2^{(-)}(q)]}{2} \cdot dt \quad (4.18)$$

dove le distanze $f_1(q)$ e $f_2(q)$, sono espresse come segue:

$$f_1(q) = y_G + H \cdot \cos \theta - B \cdot \sin \theta \leq 0 \quad (4.19a)$$

$$f_2(q) = y_G - H \cdot \cos \theta - B \cdot \sin \theta \leq 0 \quad (4.19b)$$

solo al momento dell'impatto, con $y_G = R(\cos(\tilde{\alpha} - \theta) - \cos \alpha)$.

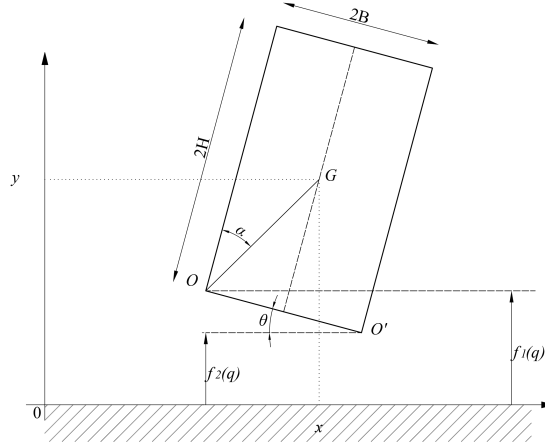


Figura 4.4: Configurazione di un blocco rettangolare piano prima dell'impatto con la sua base e indicazione delle relative dimensioni e distanze dal piano di impatto

Negli ultimi due decenni, la modellazione delle collisioni nella dinamica multicorpo ha rappresentato un tema di grande interesse. Gran parte degli studi si è focalizzata sulla determinazione delle velocità post-impatto, tipicamente attraverso l'analisi delle forze impulsive. Tuttavia, questo approccio, pur efficace nel calcolo degli effetti immediati della collisione, non riesce a catturare dettagli importanti come le deformazioni dei corpi e l'evoluzione precisa delle forze e dei momenti durante l'impatto. I vari modelli proposti in Letteratura possono essere generalmente classificati in due grandi categorie: modelli di collisione rigidi [96, 97] e modelli di collisione deformabili [79, 80, 98].

I modelli di collisione rigidi si basano sull'assunzione che le deformazioni indotte dalla collisione siano nulle o trascurabili. Questa ipotesi è particolarmente valida per oggetti costituiti da materiali molto rigidi, dove sono necessarie forze estremamente elevate per produrre deformazioni minime. Inoltre, tali modelli presuppongono che la durata dell'impatto sia estremamente breve, rendendoli efficaci per la modellazione di urti in cui il tempo di contatto è ridotto. Al contrario, i modelli di collisione deformabili forniscono una descrizione più accurata del comportamento dei corpi durante l'impatto, tenendo conto del legame tra le forze di contatto e le deformazio-

ni, basandosi sui principi fondamentali della meccanica del contatto tra solidi [99, 100]. Questi modelli sono particolarmente adatti per descrivere collisioni in cui le deformazioni sono significative.

L'uso di modelli deformabili, però, diventa meno efficiente quando le deformazioni sono di entità ridotta, poiché richiedono l'integrazione di forze elevate su brevi scale temporali, rendendo la simulazione computazionalmente onerosa. In tali casi, i modelli rigidi sono preferibili, poiché si basano sull'integrazione degli impulsi, che rappresentano grandezze fisiche ben definite e facilmente gestibili. Un vantaggio chiave di questi modelli è che le elevate forze di contatto vengono compensate dalle brevi durate dell'impatto, evitando problematiche legate alla modellazione multi-scala. Tuttavia, questo approccio comporta una perdita di informazioni riguardo all'evoluzione temporale delle forze di contatto, alle deformazioni locali e alla durata dell'impatto stesso.

Il metodo proposto in questo lavoro mira a superare tali limitazioni, sviluppando un quadro di riferimento per la modellazione delle collisioni rigide che sia in grado di incorporare anche aspetti caratteristici dei modelli deformabili. In questo modo, sarà possibile descrivere in modo più completo l'evoluzione delle forze e delle deformazioni durante l'impatto, senza perdere i vantaggi computazionali e concettuali dei modelli rigidi. Pertanto questo lavoro si propone una riformulazione del modello di contatto tradizionale adottato nella Letteratura, ispirata al modello di Housner. L'obiettivo principale è di ottenere una rappresentazione più precisa delle dinamiche di contatto, tenendo conto dell'evoluzione delle forze e delle deformazioni durante l'impatto nella dinamica rocking. A tal fine, si introduce una modifica significativa al paradigma classico: pur mantenendo la rigidità tra i punti di contatto, si allenta l'ipotesi di rigidità assoluta interna al corpo, permettendo piccole deformazioni locali. Ciò si traduce in un modello di forza basato sulla meccanica del contatto, che considera tali deformazioni senza compromettere la validità della condizione di non-penetrazione, seppure in modo meno stringente. Inoltre, i vincoli di rigidità interni al corpo, pur tralasciando per semplicità gli effetti dovuti all'attrito, consentono di risolvere l'insieme delle forze di contatto attraverso un unico parametro indipendente, ovvero la forza normale di contatto. Questo approccio mira a fornire una descrizione più accurata e realistica delle interazioni dinamiche durante l'impatto.

4.1.4.1. Il nuovo modello di contatto non lineare

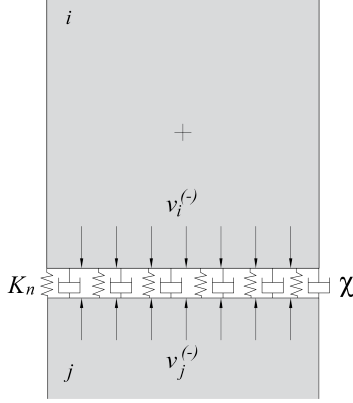


Figura 4.5: Rappresentazione dell'azione normale di contatto tra due corpi

Le basi teoriche dei modelli elastici riguardanti la meccanica del contatto risalgono al lavoro di Hertz (1881) [73], il quale stabilì che, generalmente, l'area di contatto tra due corpi assumeva una forma ellittica e non considerava alcuna dissipazione di energia durante il processo di contatto-impatto tra più corpi. Questa lacuna ha spinto numerosi ricercatori a sviluppare modelli di forza di contatto più avanzati, che integrano la dissipazione di energia. Al fine di aumentare l'efficienza computazionale nelle simulazioni numeriche ed evitare problemi di convergenza, è consigliabile adottare un modello di forza di con-

tatto che stabilisca una correlazione esplicita tra la deformazione del contatto e la forza di contatto in ogni passo temporale dell'integrazione [101]. Questa correlazione esplicita è descritta dal modello di contatto di tipo non lineare di Lankarani-Nikraves per contatti generici [79, 102].

Hertz concluse che, in generale, una superficie di contatto assume una forma ellittica [99] e che la legge del contatto formulata mette in relazione la forza di contatto con una funzione di potenza non lineare dell'indentazione, espressa come:

$$F_N = K\delta^n \quad (4.20)$$

dove K rappresenta il parametro di rigidità del contatto, δ l'indentazione relativa tra i corpi in contatto, ed n l'esponente di potenza non lineare determinato dalle proprietà materiali e geometriche della regione locale dei corpi in contatto. Questi parametri di contatto, in particolare la rigidità del contatto, possono essere determinati sia numericamente [103] che sperimentalmente [104, 105]. Tuttavia, il modello hertziano non tiene conto della dissipazione di energia e, pertanto, il suo coefficiente di restituzione equivalente è pari a uno.

Quindi, ricordando che i modelli di contatto puramente elastici soffrono della limitazione di non poter rappresentare la perdita di energia durante il processo di contatto, per ovviare a questo inconveniente, è necessario sviluppare modelli di contatto più avanzati che tengano conto della dissipazione di energia. Questo problema ha portato diversi ricercatori a estendere la legge di contatto di Hertz [73] per tenere conto

della dissipazione di energia sotto forma di smorzamento interno.

Seguendo l'approccio adottato e definito in [79, 102] e tenendo ben presente in mente che il modo più semplice per quantificare la perdita di energia durante un evento di contatto, è utilizzare il concetto di coefficiente di restituzione, che può essere valutato a partire dal bilancio di energia che si verifica tra l'istante iniziale di contatto $t^{(-)}$ e l'istante finale di contatto $t^{(+)}$. A tal fine, consideriamo $T^{(-)}$ e $T^{(+)}$, rispettivamente, l'energia cinetica di due corpi a contatto agli istanti di tempo $t^{(-)}$ e $t^{(+)}$. Utilizzando il concetto cinematico o la definizione di Newton del coefficiente di restituzione, che esprime il rapporto tra le velocità normali post-impatto e pre-impatto, si ottiene [75]:

$$\eta_n = -\frac{v_n^{(+)}}{v_n^{(-)}} \quad (4.21)$$

dove $v_n^{(-)}$ e $v_n^{(+)}$ sono, rispettivamente, la velocità relativa normale dei punti distribuiti lungo la base in fase di avvicinamento e la velocità relativa normale durante la fase di espansione o allontanamento. Pertanto, il bilancio energetico può essere espresso come:

$$\Delta T = T^{(-)} - T^{(+)} = \frac{1}{2}m_i [(v_i^{(-)})^2 - (v_i^{(+)})^2] + \frac{1}{2}m_j [(v_j^{(-)})^2 - (v_j^{(+)})^2] \quad (4.22)$$

ma poiché per il caso di studio, con blocco rettangolare che oscilla su una base piana di appoggio che è ferma, risulta che: $v_j^{(-)}$ e $v_j^{(+)}$ sono nulle, la relazione (4.22) diventa:

$$\Delta T = T^{(-)} = \frac{1}{2}m_i [(v_i^{(-)})^2 - (v_i^{(+)})^2] \quad (4.23)$$

Inoltre ricordando dalla conservazione della quantità di moto, in direzione dell'impatto, che vale la seguente relazione:

$$m_i [v_i^{(-)} - v_i^{(+)}] = 0 \implies v_i^{(-)} = v_i^{(+)} \quad (4.24)$$

la variazione di energia dissipata ΔT di un blocco che impatta, in funzione del coefficiente di restituzione η_n e delle velocità relative normali può essere espressa in funzione del CoR come segue:

$$\Delta T = \frac{1}{2}m [v_{n,i}^{(-)}]^2 (1 - \eta_n^2) = \frac{1}{2}m [\dot{\delta}^{(-)}]^2 (1 - \eta_n^2) \quad (4.25)$$

Inoltre, l'energia cinetica iniziale associata al contatto ha due destinazioni diverse:

una parte viene convertita in energia di deformazione elastica immagazzinata e una seconda parte dell'energia cinetica iniziale viene dissipata. Pertanto, il bilancio energetico tra l'inizio e la fine della fase di compressione può essere scritto come:

$$T^{(-)} = T^{(m)} + U^{(max)} \quad (4.26)$$

in cui $U^{(max)}$ rappresenta la massima energia elastica di deformazione accumulata e $T^{(m)}$ denota l'energia cinetica del sistema alla fine della fase di compressione, nel caso in cui i due corpi si muovono insieme con velocità comune v_{ij} .

Per il caso che si sta analizzando, risulta che $T^{(m)} = 0$ e quindi vale il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$T^{(-)} = U^{(max)} \implies \frac{1}{2}m \left[v_i^{(-)} \right]^2 = U^{(max)} \quad (4.27)$$

Ma poiché l'energia di deformazione immagazzinata è pari al lavoro compiuto dalla forza di contatto che si sviluppa dallo stato di deformazione zero allo stato di deformazione massima ed è espressa come: [79]

$$U^{(max)} = \int_0^{\delta_{max}} F_N d\delta \quad (4.28)$$

per ottenere una soluzione di questo integrale, è necessario tener presente che la forza di contatto è rappresentata dalla legge di contatto elastica pura di Hertz e, di conseguenza, l'energia elastica assorbita può essere riscritta come:

$$U^{(max)} = \int_0^{\delta_{max}} K \delta^n d\delta = \frac{K}{(n+1)} \delta_{max}^{n+1} \quad (4.29)$$

dove tipicamente si assume un valore di $n = 1$ [106].

Quindi, l'energia di deformazione elastica accumulata è data da:

$$U^{(max)} = \frac{1}{2} K \delta_{max}^2 \quad (4.30)$$

Uguagliando le relazioni (4.27) e (4.30) è possibile ricavare la velocità iniziale di indentazione, in funzione dello spostamento δ_{max} :

$$\left[\dot{\delta}^{(-)} \right]^2 = \frac{K}{m} \delta_{max}^2 \quad (4.31)$$

Nota tale grandezza, sarà quindi possibile determinare un'espressione per la velo-

cità di indentazione $\dot{\delta}$ in qualsiasi momento durante la fase di compressione, se si ripercorrono i passaggi precedenti tra il tempo iniziale di contatto $t^{(-)}$ e un tempo intermedio t tale che $t^{(-)} \leq t \leq t^{(m)}$ e per cui l'indentazione δ deve soddisfare la relazione $0 \leq \delta \leq \delta_{max}$. Per cui dalla conservazione dell'energia cinetica e potenziale in un tempo intermedio t durante la fase di compressione, si ottiene:

$$T^{(-)} = T(t) + U(t) \quad (4.32)$$

con

$$T^{(-)} = \frac{1}{2}m [\dot{\delta}^{(-)}]^2 \quad (4.33a)$$

$$T(t) = \frac{1}{2}m [\dot{\delta}(t)]^2 \quad (4.33b)$$

$$U(t) = \frac{K}{2} [\delta(t)]^2 \quad (4.33c)$$

Poiché l'energia totale è conservata e $T^{(-)}$ è l'energia cinetica iniziale, si ottiene:

$$[\dot{\delta}(t)]^2 = [\dot{\delta}^{(-)}]^2 - \frac{K}{m} [\delta(t)]^2 \quad (4.34)$$

Il passo successivo è la determinazione dell'energia dissipata a causa dello smorzamento interno. Per raggiungere questo obiettivo, si consideri un sistema equivalente al processo di contatto, rappresentato da un sistema dinamico SDoF (a un solo grado di libertà) in cui all'interfaccia poniamo un insieme di molle non lineari senza tensione distribuite in modo continuo e parallelamente a smorzatori non lineari. Sulla base dell'ipotesi che la dissipazione di energia nell'impatto sia sufficientemente piccola, rispetto all'energia elastica massima accumulata, possiamo approssimare la velocità di indentazione durante le due fasi (compressione e restituzione) con la stessa espressione (4.34). Si può allora dimostrare che l'energia dissipata è valutata attraverso il lavoro compiuto dalla componente della forza di smorzamento $D\dot{\delta}^n$, e può essere scritta come:

$$\Delta T = \oint D\dot{\delta} d\delta = \oint \chi \delta^n \dot{\delta} d\delta = 2 \int_0^{\delta_{max}} \chi \delta^n \dot{\delta} d\delta \quad (4.35)$$

dove $\oint$ si riferisce all'integrale attorno a un ciclo di isteresi per la forza di contatto (Lankarani e Nikravesh (1990) [79]) e permette di ottenere la quantità totale di energia dissipata. Sostituendo l'espressione (4.34) nell'Equazione (4.35) e sviluppando

l'integrale (vedi Appendice B.1) si ottiene:

$$\Delta T = \frac{4}{3} \chi \delta_{max}^3 \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (4.36)$$

Inoltre, ricordando che è possibile esprimere l'indentazione massima δ_{max} in termini della velocità di indentazione iniziale usando l'Equazione (4.31), allora l'Equazione (4.36) diventa:

$$\Delta T = \frac{4}{3} \chi \left[\dot{\delta}^{(-)} \right]^3 \left(\frac{m}{K} \right) \quad (4.37)$$

e uguagliando le relazioni (4.25) e (4.37) è possibile ricavare il fattore di smorzamento χ come:

$$\chi = \frac{3}{8} \frac{K(1 - \eta_n^2)}{\dot{\delta}^{(-)}} \quad (4.38)$$

Di conseguenza, è stata stabilita una connessione diretta tra il coefficiente di restituzione (CoR) e un fattore di smorzamento equivalente che permette di esprimere la forza di contatto, unita alla rappresentazione dello smorzamento per il caso di contatto-impatto tra un blocco di forma rettangolare e una base piana, nella forma alternativa seguente:

$$F_N = K \delta \left[1 + \frac{3(1 - \eta_n^2)}{8} \frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}^{(-)}} \right] \quad (4.39)$$

Il modello di contatto dato dall'Equazione (4.39) è valido per i casi in cui l'energia dissipata durante il contatto è relativamente piccola se paragonata alla massima energia elastica assorbita. La relazione determinata, vale cioè per valori del coefficiente di restituzione prossimi all'unità.

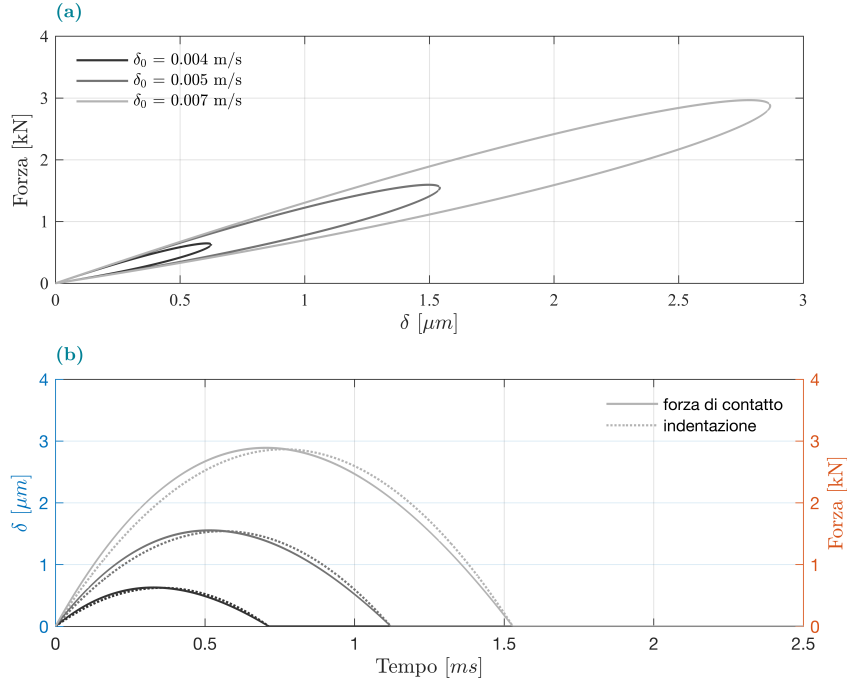


Figura 4.6: Impatto tra superfici piane modellate dalla nuova legge di contatto: (a) relazione forza di contatto in funzione dell'indentazione δ per differenti velocità iniziali; (b) relazione indentazione/forza in funzione del tempo

L'uso dello schema di smorzamento incluso in questo modello di forza di contatto fornisce il risultato illustrato in Figura 4.6, in cui sono presentate la profondità di indentazione, la forza di contatto normale e l'isteresi di un impatto tra due superfici piane in contatto. Per i calcoli è stato utilizzato un valore di rigidezza K pari a $1 \cdot 10^9 \text{ N/m}$ e un coefficiente di restituzione di $\eta_n = 0.75$. La rigidezza equivalente è stata valutata in base alle proprietà del materiale, mediante le Equazioni (4.40) e (4.41):

$$K = \frac{a}{0,475(h_i + h_j)} \quad (4.40)$$

dove h_k è definito per il k -esimo corpo, come:

$$h_k = \frac{1 - \nu_k^2}{E_k}, \quad k = i, j \quad (4.41)$$

i parametri E_k e ν_k esprimono il modulo di Young e il coefficiente di Poisson, rispettivamente, mentre a è la metà della larghezza del contatto.

Dall'analisi della Figura 4.6 si può osservare che le fasi di compressione e restituzione del processo di contatto non sono le stesse a causa delle differenze nel processo

di dissipazione dell'energia tra queste due fasi. Ciò è chiaro osservando la natura non simmetrica del grafico della forza di contatto. Inoltre, è necessario ricordare che l'Equazione (4.39) è valida per velocità d'impatto inferiori alla velocità di propagazione delle onde elastiche attraverso i due corpi, $\dot{\delta}^{(-)} \leq 10^{-5} \sqrt{E/\rho}$, con E e ρ rispettivamente, modulo di Young e densità del materiale [107]. In particolare, la grandezza $\sqrt{E/\rho}$ velocità di propagazione delle onde, è la maggiore tra due velocità di propagazione delle onde di deformazione elastica nei corpi in collisione. Shiva-swamy (1997) [108] ha studiato teoricamente e sperimentalmente l'impatto tra corpi e ha dimostrato che a basse velocità di impatto, lo smorzamento dell'isteresi è il fattore principale per la dissipazione dell'energia. Impatti a velocità più elevate, superiori alla velocità di propagazione delle onde di deformazione elastica, è probabile che dissipino energia in una forma non prevista dal modello attuale, e piuttosto in termini di deformazione o deformazioni permanenti (Lankarani e Nikraves 1994 [102]).

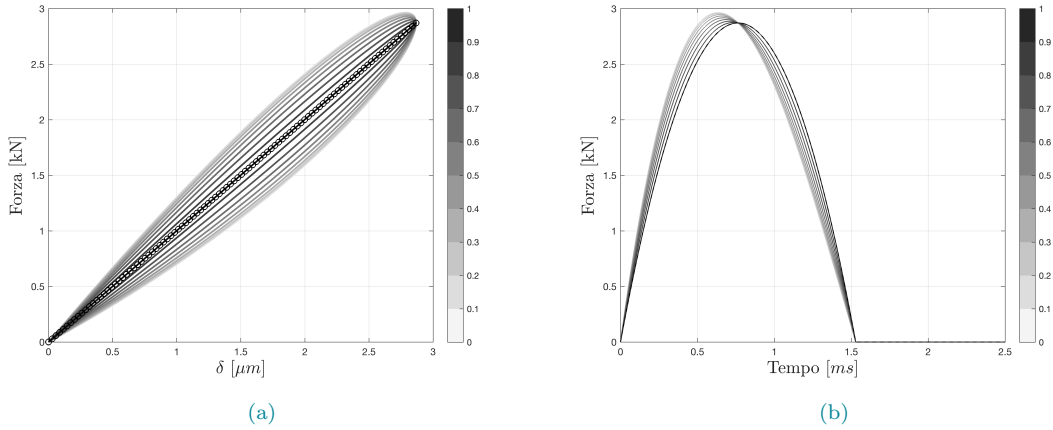


Figura 4.7: (a) Relazione forza-indentazione per il nuovo modelli di forza di contatto per un impatto diretto e per diversi valori del coefficiente di restituzione; (b) Forza di contatto durante il processo di contatto-impatto

L'evoluzione della forza di contatto rispetto all'indentazione durante il processo di contatto è illustrata nella Figura 4.7a, che descrive la relazione analitica del fattore di isteresi-smorzamento χ in funzione del coefficiente di restituzione. Il modello di forza di contatto è confrontato con il modello di forza di contatto hertziano, che non considera la dissipazione di energia. È evidente che, quando il coefficiente di restituzione è pari a 1, il diagramma di fase forza-indentazione coincide con quello di Hertz. Inoltre, si osserva chiaramente che, con un coefficiente di restituzione prossimo allo zero, la profondità di indentazione diminuisce mentre l'entità della

forza di contatto aumenta. La Figura 4.7b mostra invece l'evoluzione temporale della forza di contatto nella direzione normale secondo il nuovo modello. Nel modello di forza di contatto hertziano, la fase di compressione è simmetrica a quella di restituzione. Al contrario, nel nuovo modello, che tiene conto della dissipazione di energia durante il contatto, la fase di restituzione differisce significativamente dalla fase di compressione. È chiaro che, riducendo il coefficiente di restituzione da 1 a 0 (passando quindi da un contatto perfettamente elastico a uno perfettamente plastico), la durata del processo di contatto diminuisce. Tuttavia, l'entità della forza di contatto aumenta. Va notato che, sebbene la durata del processo di contatto non cambi per questi modelli, l'entità della forza di contatto cresce.

Esempio 3: Impatto nella dinamica del rocking

In questo esempio si dimostra l'importanza di un corretto rilevamento del contatto e della regolazione del passo temporale durante l'analisi numerica. Un blocco oscillante con snellezza $\alpha = 0.32$ [rad] e frequenza naturale $p = 3.05$ [s⁻¹] è soggetto a un impulso del terreno di tipo antisimmetrico di Ricker ($a_p = 0.80g$, $T_p = 1$ s), definito dall'Equazione (3.14). Il blocco viene rilasciato da fermo dalla configurazione iniziale e oscilla sotto l'azione del terreno, nella direzione positiva dell'asse x , fino a impattare su una base rigida piana. Le forze di contatto all'interfaccia sono valutate utilizzando il modello di contatto che include la dissipazione di energia, definito dall'Equazione (4.39). In questo modello, il parametro di rigidezza del contatto K è pari a $1.2789 \cdot 10^9$ [N/m] e l'esponente elastico per il contatto piano n è pari a 1. Il tempo trascorso tra i contatti tende a ridursi progressivamente fino a zero, terminando quando il blocco arresta il suo moto oscillante.

Per comprendere l'influenza del coefficiente di restituzione η , è stata ottenuta e presentata la risposta dinamica del sistema nelle Figure 4.8. I grafici mostrano l'andamento temporale dell'indentazione δ , della velocità di indentazione $\dot{\delta}$, e della forza di contatto rispetto all'indentazione.

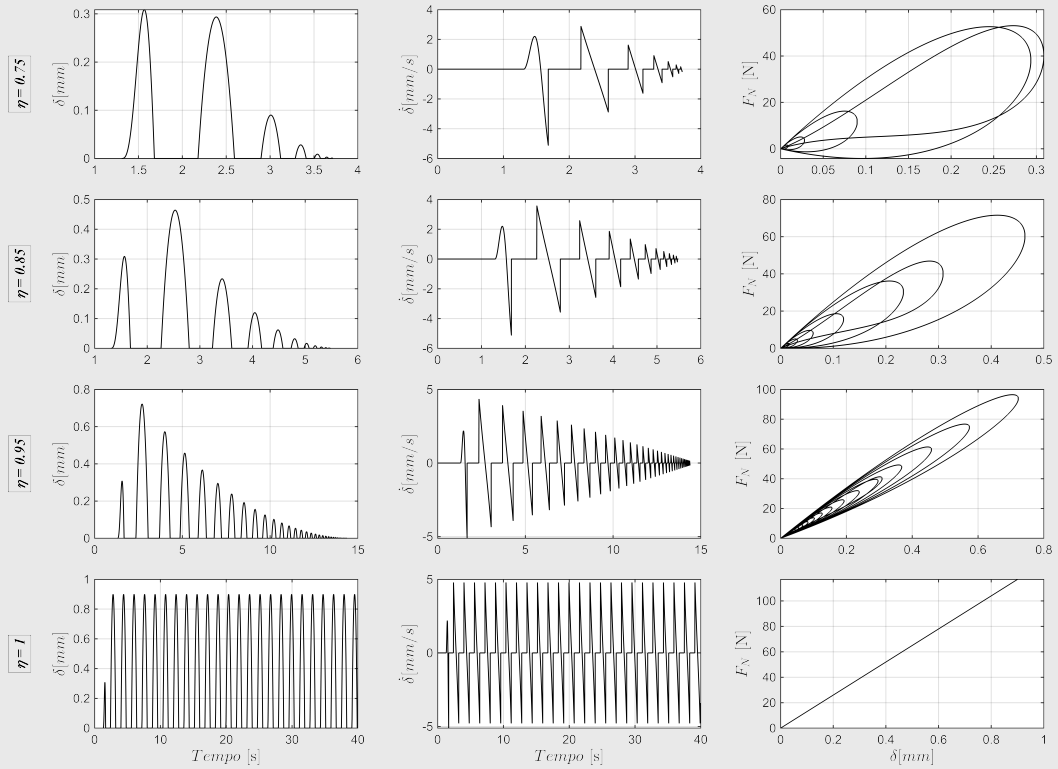


Figura 4.8: Influenza del coefficiente di restituzione η sul comportamento del blocco oscillante: (a) indentazione rispetto al tempo; (b) velocità di indentazione rispetto al tempo; (c) relazione forza di contatto-indentazione

Come previsto, quando η diminuisce, si osserva una riduzione sia della deformazione massima che della forza massima di contatto. Questo fenomeno è accompagnato da un aumento della durata del contatto e della dimensione del ciclo di isteresi, indicativo dell'energia dissipata durante il processo di contatto. In caso di CoR pari a uno, corrispondente alla legge di contatto elastica pura di Hertz, non si verifica dissipazione di energia. Questo comportamento è chiaramente visibile nel diagramma forza-deformazione della Figura 4.8, che non mostra alcun ciclo di isteresi.

4.1.5. Algoritmo numerico di rilevamento del contatto

Una delle sfide più complesse nella simulazione numerica di collisioni di sistemi multicorpo risiede nella determinazione precisa del momento in cui avviene l'impatto. Poiché i periodi di contatto sono estremamente brevi, la scelta del passo temporale per l'integrazione delle variabili di stato diventa cruciale. Un approccio conservativo potrebbe consistere nell'utilizzare un passo temporale molto ridotto per tutta la simulazione, ma ciò risulterebbe altamente inefficiente dal punto di vista computazionale. Gli algoritmi di integrazione a passo variabile offrono, invece, una soluzione più dinamica, permettendo l'adozione di passi temporali più lunghi quando la dinamica pre-impatto non coinvolge alte frequenze. Tuttavia, questo può causare indentazioni iniziali non realistiche al momento del contatto, con il rischio di stalli nell'algoritmo o di forze di contatto anomale, distorcendo così la dinamica post-impatto rispetto al comportamento fisico reale.

In questo contesto, viene proposto un metodo per regolare automaticamente il passo temporale negli algoritmi di integrazione a passo variabile in prossimità del contatto tra il corpo oscillante e la base. Questa metodologia assicura che, al verificarsi di un impatto, il passo temporale sia sufficientemente ridotto da mantenere l'indentazione (o penetrazione) iniziale entro una soglia predeterminata. Durante l'inizio del contatto e dopo ogni passo temporale completato, il controllo dell'errore numerico dell'algoritmo di integrazione viene integrato con criteri fisici per l'accettazione o il rifiuto del passo temporale, mantenendo così l'accuratezza sia numerica che fisica. I punti di forza di questo approccio includono la facilità di implementazione, l'efficienza computazionale e la capacità di gestire efficacemente le transizioni tra stati di contatto e non contatto nella dinamica rocking. Quando in un sistema sono presenti corpi o parti fondamentali che si muovono a velocità diverse, ossia quando gli autovalori delle equazioni del moto sono distribuiti su un ampio spettro, il sistema viene considerato rigido. Questa rigidità emerge quando il movimento globale del sistema multicorpo si combina con forze di contatto non lineari, provocando rapidi cambiamenti in velocità e accelerazioni [81].

Durante il processo di integrazione numerica, sia l'ordine che la dimensione del passo dell'algoritmo è stato regolato per garantire che la tolleranza dell'errore rimanga entro i limiti prefissati. La capacità di variare la dimensione del passo temporale è particolarmente utile per integrare sistemi che operano su scale temporali diverse, come nel caso dei sistemi rocking con collisioni. In assenza di forze di contatto, vengono solitamente utilizzati passi temporali più ampi; tuttavia, al momento del-

l'impatto, il passo si riduce significativamente a causa della comparsa di componenti ad alta frequenza nella risposta del sistema, indipendentemente dalla profondità di indentazione tra le superfici di contatto.

Pertanto, come già sottolineato, individuare il momento esatto del contatto è uno degli aspetti più critici nella simulazione della dinamica rocking con collisioni. Inoltre, il modello numerico utilizzato per descrivere il contatto richiede una conoscenza precisa delle condizioni pre-impatto, come la velocità d'impatto e l'orientamento della normale alla superficie di collisione. Tuttavia, né la durata del contatto né l'entità della penetrazione possono essere previste con precisione basandosi solo sulle condizioni pre-impatto, poiché queste sono influenzate dai vincoli cinematici e dalle interazioni all'interno del sistema. Se l'integrazione numerica non è gestita correttamente, il primo contatto tra i corpi potrebbe essere caratterizzato da una penetrazione eccessiva, con conseguente calcolo di forze di contatto artificialmente elevate attraverso le formulazioni di penalità (penalty method), compromettendo così l'affidabilità dell'intera simulazione.

In un contesto specifico, come quello della simulazione numerica del comportamento dinamico di un blocco soggetto a moto oscillatorio, la determinazione dell'istante esatto di contatto tra il blocco e la superficie di appoggio, rappresenta una sfida critica per garantire l'accuratezza del modello. La natura discreta delle simulazioni numeriche rende impossibile individuare direttamente l'istante di contatto; è quindi necessario un raffinamento computazionale per determinare con precisione tale istante.

Il metodo si basa sull'identificazione di un cambiamento di segno nell'indentazione $\delta(t)$ tra due istanti temporali consecutivi, t_1 e t_2 , che indica il passaggio del blocco attraverso una fase di non contatto, seguita dal ristabilimento del contatto con la superficie. Questo cambiamento di segno, che segnala una transizione da uno stato di non contatto a uno di contatto, è il primo indizio dell'avvenuto impatto, ma non è sufficiente per determinare con esattezza l'istante di contatto, data la natura

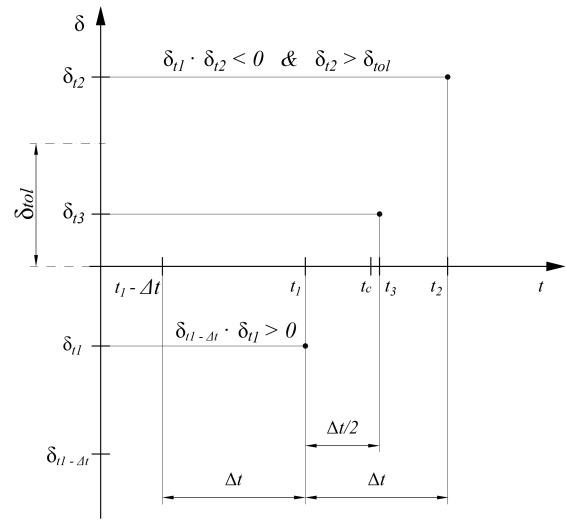


Figura 4.9: Schema computazionale per determinare l'esatto istante di contatto

discreta dei dati temporali. Per affinare la stima dell'istante di contatto, il metodo impiega una tecnica di bisezione iterativa. Quando viene rilevato il cambiamento di segno nell'indentazione, l'intervallo temporale $[t_1, t_2]$ viene suddiviso ripetutamente in segmenti più piccoli. Si calcola l'indentazione $\delta(t_c)$ al tempo medio di ciascun segmento, e si procede confrontando il segno e il valore di $\delta(t_c)$ con una soglia di tolleranza predefinita δ_{tol} , dove δ_{tol} è un piccolo numero positivo che funge da salvaguardia contro gli errori di arrotondamento [109].

Se $\delta(t_c)$ è positivo e supera δ_{tol} , l'intervallo temporale viene ridotto a $[t_1, t_c]$, concentrando così la ricerca verso l'inizio dell'intervallo. Se invece $\delta(t_c)$ è negativo o non supera la soglia δ_{tol} , l'intervallo viene aggiornato a $[t_c, t_2]$, restringendo la ricerca verso la fine dell'intervallo. Questo processo di bisezione prosegue iterativamente fino a quando l'intervallo temporale non raggiunge una lunghezza sufficientemente ridotta da garantire la precisione desiderata nell'identificazione dell'istante di contatto. Durante questo processo, si verifica costantemente che il prodotto $\delta(t_1) \cdot \delta(t_2)$ sia negativo, a conferma che il blocco ha effettivamente attraversato uno stato di non contatto e che l'indentazione è tornata a crescere, superando la soglia δ_{tol} [110]. Il risultato finale del processo di bisezione è l'identificazione dell'istante di contatto t_c con elevata precisione, che è essenziale per calcolare correttamente le forze di contatto che influenzano il moto del blocco. Questo metodo, che è stato implementato in MATLAB [111], rappresenta un efficace approccio computazionale per superare le limitazioni imposte dalla discretizzazione temporale, garantendo una rappresentazione accurata del fenomeno di contatto e migliorando la qualità delle simulazioni numeriche complessive. La precisione raggiunta attraverso questo metodo di raffinamento è cruciale per l'analisi dinamica successiva, contribuendo significativamente alla robustezza e all'affidabilità del modello di simulazione. In conclusione, l'adozione di tecniche avanzate, come la regolazione automatica del passo temporale e il raffinamento iterativo del contatto, è fondamentale per aumentare la precisione e l'affidabilità delle simulazioni, sia in scenari complessi che in applicazioni specifiche come quella del blocco oscillante. Queste strategie garantiscono che la simulazione rispecchi accuratamente il comportamento fisico del sistema, permettendo una valutazione più realistica delle dinamiche post-impatto e contribuendo a una migliore comprensione dei fenomeni coinvolti.

Algorithm 4.1 Dinamica Rocking con il Nuovo Modello di Impatto

Input:

- 1: Parametri geometrici e meccanici: $\alpha, R, I_O, p, \eta, E_k, \nu_k$.
- 2: Impulso impresso dal terreno: $\ddot{u}_g, a_p, T_P$.
- 3: Stato iniziale del moto: $t_0, \theta_0, \dot{\theta}_0, \delta_0, \dot{\delta}_0, F_N$.

Output:

- 4: Stato finale del moto rocking: $t, \theta(t_{end}), \dot{\theta}(t_{end})$.

Inizializza:

- 5: **while** $E_c \geq 10^{-3} \cdot E_{max}$ **e** $t_{end} < 0.98 \cdot t_{final}$ **do**
- 6: Risolvi l'ODE con **ode45** dell'Equazione (2.23).
- 7: Calcola $\delta(t)$ e $\dot{\delta}(t)$.
- 8: **if** $\delta \geq 0$ **then**
- 9: Raffina il passo temporale per trovare t_c .
- 10: Imposta una tolleranza temporale per il raffinamento: $\delta_{tol} \leftarrow 1 \times 10^{-6}$.
- 11: Identifica i punti nella serie temporale $\delta(t)$ dove si verifica un cambiamento di segno.
- 12: **for** ogni intervallo tra due punti consecutivi con cambiamento di segno **do**
- 13: **if** $\delta_{j-1} < \delta_{tol}$ **e** $\delta_j > \delta_{tol}$ **then**
- 14: Assegna t_1 e t_2 come i tempi corrispondenti ai punti rilevanti.
- 15: Assegna δ_1 e δ_2 come i valori di indentazione corrispondenti.
- 16: **while** $t_2 - t_1 > dt/10$ **do**
- 17: Calcola il tempo medio: $t_c \leftarrow \frac{t_1+t_2}{2}$.
- 18: Calcola l'indentazione media: $\delta_c \leftarrow$.
- 19: **if** $\delta_c < \delta_{tol}$ **then**
- 20: Aggiorna $t_1 \leftarrow t_c$ e $\delta_1 \leftarrow \delta_c$.
- 21: **else**
- 22: Aggiorna $t_2 \leftarrow t_c$ e $\delta_2 \leftarrow \delta_c$.
- 23: **end if**
- 24: **end while**
- 25: Memorizza il tempo di contatto raffinato t_c e l'indentazione δ_c .
- 26: **end if**
- 27: **end for**
- 28: **end if**
- 29: Calcola le forze di contatto: F_N^c e F_N^r usando l'Equazione (4.39).
- 30: Calcola gli impulsi di contatto: $\mathbf{I}_N^c$ e $\mathbf{I}_N^r$.
- 31: **Aggiornamento delle Condizioni Iniziali:**
- 32: **if** $\theta(t) = 0$ **e** $ie == 1$ **then**
- 33: **if** $\exists \mathbf{I}_N \neq 0$ **then**
- 34: $\mathbf{I}_{total} \leftarrow \mathbf{I}_{total, end}$.
- 35: Calcola la variazione della velocità angolare: $\Delta\theta \leftarrow \frac{\mathbf{I}^{(r)}}{I_0}$.
- 36: Imposta le nuove condizioni iniziali:
- 37: $\theta_0 \leftarrow 0$.
- 38: $\dot{\theta}_0 \leftarrow \dot{\theta}_{nt} \cdot \eta + \Delta\theta$.
- 39: Aggiorna $t_0 \leftarrow t_{nt}$.
- 40: **end if**
- 41: **else**
- 42: Interrompi il ciclo.
- 43: **end if**
- 44: **end while**
- 45: **if** $ie(end) == 2$ **then**
- 46: Interrompi il ciclo.
- 47: **end if**

4.1.6. Influenza dell'impatto sulla risposta dinamica rocking di un blocco rigido

In questa sezione viene esaminata l'influenza dell'impatto sulla risposta dinamica di un blocco rigido soggetto a moto rocking, con particolare attenzione alle forze impulsive che si generano durante il contatto con la superficie di appoggio. Gli impatti ripetuti, influenzano in modo diretto la dinamica del blocco, aggiornando costantemente la velocità angolare e modificando l'energia del sistema. Ogni impatto provoca una variazione istantanea della velocità angolare del blocco e un aggiornamento della sua energia meccanica, dovuto agli impulsi di compressione e restituzione. Il fenomeno può essere analizzato osservando l'evoluzione nel tempo di queste grandezze e l'effetto cumulativo degli impatti successivi. Questi fattori condizionano la stabilità del moto rocking, riducendo progressivamente l'ampiezza delle oscillazioni.

Il modello analitico sviluppato consente di quantificare tali effetti attraverso il calcolo degli impulsi integrati, che rappresentano l'azione delle forze impulsive durante il contatto. Il blocco subisce variazioni cinematiche, aggiornando la velocità angolare in funzione degli impulsi generati ad ogni ciclo di impatto. La variazione della velocità angolare $\Delta\omega$ può essere espressa dalla seguente relazione:

$$\Delta\omega = \frac{\mathbf{I}^{(r)}}{I_0} \quad (4.42)$$

dove $\mathbf{I}^{(r)}$ rappresenta l'impulso di restituzione risultante, mentre I_0 è il momento di inerzia del blocco rispetto al punto di contatto. Questa variazione modifica l'energia del sistema e influisce sulla sua capacità di mantenere oscillazioni stabili o di avvicinarsi al ribaltamento.

Dal punto di vista dinamico, la perdita di energia è direttamente correlata alla diminuzione degli impulsi, come evidenziato dai risultati numerici. La progressiva riduzione degli impulsi nel tempo, sia nella fase di compressione che di restituzione, è indicativa della dissipazione di energia. La risposta dinamica del blocco, quindi, dipende in modo critico dall'energia dissipata a seguito di ciascun impatto, che limita la capacità del blocco di mantenere un moto oscillatorio stabile e lo porta verso una condizione di equilibrio o di ribaltamento. L'analisi quantitativa del comportamento impulsivo del blocco rigido è stata condotta utilizzando il modello analitico sviluppato nei paragrafi precedenti. Il blocco rigido considerato ha una massa di 132535 kg, una larghezza di 2.5 m e un'altezza di 10 m. Il momento di inerzia del

blocco rispetto al punto di contatto è calcolato come $I_0 = 4/3mR^2$. Le proprietà del contatto tra il blocco e la superficie di appoggio sono state modellate utilizzando un modulo di elasticità del blocco pari a 50 GPa e del materiale della superficie di 1 GPa, con coefficienti di Poisson pari rispettivamente a 0.3 e 0.25. Questi parametri meccanici influiscono sulla rigidità normale del contatto applicando la relazione (4.40), ottenendo un valore pari a $K = 2.7536 \cdot 10^9$ [N/m] e, quindi, sulla risposta dinamica durante gli impatti. Il coefficiente di restituzione η è stato assunto pari a 0.95, con un fattore di smorzamento $\chi = 1.00 \cdot 10^8$. Il blocco è inizialmente a riposo, con un angolo di rotazione $\theta_0 = 0$ [rad] e una velocità angolare $\dot{\theta}_0 = 0$ [rad/s]. Il moto rocking viene indotto da un'onda di accelerazione con ampiezza $a_p = 4.80$ g e frequenza $f = 0.666$ [Hz], con un passo temporale di integrazione molto fine di $dt = 1e^{-6}$ [s] per catturare accuratamente gli impatti.

Il comportamento dinamico del blocco è stato analizzato calcolando gli impulsi integrati che derivano dalle forze di contatto durante il tempo di contatto per ogni impatto. Questi impulsi, separati in fase di compressione e restituzione, determinano la variazione della quantità di moto angolare del blocco, influenzando direttamente la sua dinamica.

Nel grafico di Figura 4.10 sono riportati gli sviluppi temporali degli impulsi di compressione (colore rosso) e di restituzione (colore blu) per ciascun impatto. I valori puntuali lungo le curve rappresentano l'integrazione delle forze di contatto nel tempo d'impatto. L'impulso di compressione, $\mathbf{I}^{(c)}$, corrisponde alla forza frenante che agisce sul blocco, riducendone istantaneamente la velocità angolare. L'impulso di restituzione, $\mathbf{I}^{(r)}$, riflette invece l'energia che il sistema riesce a recuperare, ma solo in parte.

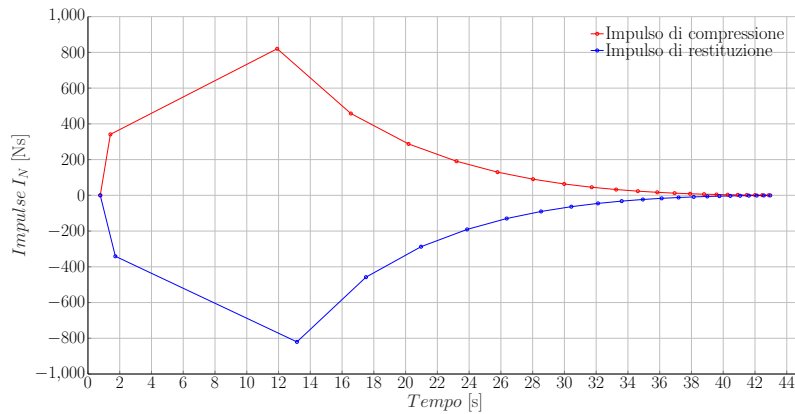


Figura 4.10: Evoluzione temporale delle forze impulsive durante gli impatti nel moto rocking: è indicato con il colore blu l'impulso di restituzione e con il colore rosso l'impulso di compressione

Il primo impatto mostra un impulso di compressione con un picco massimo di circa $8.35 \cdot 10^2$ Ns, seguito da una progressiva riduzione nei successivi impatti. Questo andamento suggerisce una perdita costante di energia meccanica da parte del blocco. Parallelamente, l'impulso di restituzione, che raggiunge un picco di circa $8.05 \cdot 10^{-2}$ Ns, segue una tendenza simile, pur con valori leggermente inferiori, confermando l'incapacità del sistema di recuperare l'energia dissipata.

Col procedere degli impatti, entrambi gli impulsi si riducono fino a raggiungere valori trascurabili oltre i 35 secondi, riflettendo la perdita progressiva di energia e la conseguente diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni del blocco. Inizialmente, tale differenza è significativa, ma si riduce con il passare del tempo, indicando un progressivo decremento delle perdite energetiche.

Durante le prime fasi del moto di rocking, l'impulso totale causa una riduzione consistente della velocità angolare del blocco ($\Delta\omega$). Tuttavia, man mano che il sistema evolve, la variazione di $\Delta\omega$ diventa progressivamente meno marcata, fino a quasi annullarsi verso la fine della simulazione. In questa fase, le curve di compressione e restituzione si avvicinano asintoticamente allo zero, segnalando che gran parte dell'energia iniziale è stata dissipata. Il sistema, quindi, tende verso uno stato di equilibrio dinamico oppure, a seconda delle condizioni iniziali, potrebbe avvicinarsi al ribaltamento.

L'analisi degli impulsi integrati ha evidenziato come la dinamica del blocco rigido soggetto a moto rocking sia fortemente influenzata dai cicli di impatto. Ogni impatto comporta una dissipazione progressiva dell'energia, con una riduzione graduale degli impulsi sia nella fase di compressione che in quella di restituzione. Il modello analitico adottato ha dimostrato la capacità di catturare con precisione la risposta impulsiva del sistema, fornendo un quadro chiaro della perdita energetica progressiva e del conseguente smorzamento del moto rocking. La progressiva riduzione degli impulsi conferma la tendenza del blocco a stabilizzarsi o a ribaltarsi, a seconda delle condizioni iniziali.

Lo sviluppo futuro di un modello di impatto distribuito per l'analisi dinamica di un blocco rigido piano oscillante si basa sull'osservazione che, a differenza di alcune approssimazioni precedenti che consideravano un singolo punto di impatto, gli impulsi si distribuiscono effettivamente lungo tutta la base del blocco durante il contatto con la superficie. Questa distribuzione degli impulsi riflette la complessità reale del fenomeno e richiede un approccio più sofisticato per essere modellata con precisione. Per simulare questa distribuzione, il modello proposto suddivide la base del blocco in

n punti di impatto, uniformemente distribuiti. Sebbene l'adozione di una rappresentazione discreta piuttosto che continua degli impulsi rappresenti un'approssimazione, essa consente una modellazione più efficiente, mantenendo comunque un buon livello di accuratezza. Aumentando il numero di punti d'impatto considerati, si ottiene una descrizione sempre più dettagliata della dinamica dell'interazione tra blocco e superficie. Pertanto, se lungo la base del blocco rigido si ipotizza la presenza di n punti d'impatto ($n \geq 2$), denotati come P_i ($i = 1, 2, \dots, n$), ogni punto d'impatto sarà caratterizzato da una forza impulsiva che agisce in una posizione specifica lungo la base. La posizione orizzontale relativa del punto P_i rispetto al centroide G del blocco è data da:

$$\zeta_i = -b + \frac{2B}{(n-1)} \cdot (i-1) \quad (4.43)$$

L'uso di una modellazione distribuita permetterà di esaminare in modo più dettagliato gli effetti dell'impatto durante il moto rocking. Ogni punto P_i della base interagirà con la superficie di contatto generando impulsi locali, che contribuiranno alla variazione complessiva della quantità di moto angolare del sistema. Gli impulsi generati in ogni punto verranno integrati nel tempo per ottenere una descrizione globale della dinamica del blocco, considerando le interazioni multiple lungo la base. L'adozione di questo modello supererà alcune limitazioni del modello di impatto puntuale, soprattutto nei casi in cui la base del blocco sarà sufficientemente larga da richiedere un'analisi spazialmente dettagliata degli impatti. Con l'incremento del numero di punti di contatto n , il modello distribuito migliorerà nella capacità di catturare i dettagli della dinamica del blocco, pur mantenendo un bilanciamento tra accuratezza e complessità computazionale. Tuttavia, sarà importante notare che la modellazione distribuita, pur aumentando la precisione dell'analisi, risulterà computazionalmente più onerosa rispetto al modello a impatto singolo.

In conclusione, la dinamica del moto rocking, analizzata attraverso il modello di impatto distribuito, fornirà una descrizione più dettagliata dei fenomeni che avverranno durante il contatto. Questa metodologia aprirà la strada a ulteriori sviluppi, tra cui l'implementazione di approcci numerici avanzati per simulare in modo più accurato la distribuzione degli impulsi e le loro interazioni lungo la base del blocco, migliorando la capacità predittiva del modello nel descrivere scenari di ribaltamento o stabilizzazione del moto oscillatorio.

5 | UN NUOVO APPROCCIO SPERIMENTALE ALLA DINAMICA DEL ROCKING DI STRUTTURE MULTIBLOCCO IN MURATURA

In questo capitolo si mostrano e si discutono i risultati di un'ampia campagna di prove sperimentali condotte su modelli di blocchi realizzati in scala ridotta con differenti rapporti di snellezza. I modelli sono costituiti da blocchi in malta cementizia la cui geometria è stata ottenuta mediante l'impiego di casseri realizzati tramite tecnologia di stampa 3D. I blocchi si differenziano per la presenza o meno di spigoli raccordati al fine di simulare le condizioni in cui il blocco reale possa danneggiarsi a seguito di una continua oscillazione. I sistemi multiblocco realizzati sono stati appoggiati su piani di materiali differenti al fine di variare la rigidezza al contatto durante il rocking.

Le prove sperimentali condotte si differenziano a seconda della forzante impiegata: sono stata svolte prove preliminari di oscillazione libera mediante inclinazioni iniziali arbitrarie di ogni provino e prove con oscillazione forzata indotta da un attuatore dinamico.

Le prove sperimentali hanno permesso di analizzare in dettaglio la risposta dinamica dei modelli, identificando le principali grandezze che influenzano il loro comportamento. Sono stati esaminati gli effetti dovuti alla presenza di imperfezioni geometriche, la dipendenza dalla natura dell'input sismico e i meccanismi di dissipazione dell'energia.

I risultati sperimentali sono stati confrontati con i risultati numerici ottenuti mediante l'implementazione dell'approccio teorico proposto in simulazioni numeriche sviluppate in ambiente MATLAB. Si precisa che il confronto è stato possibile in quanto i provini multiblocco realizzati in scala ridotta per le prove presentano la stessa snellezza dei casi di studio affrontati numericamente. Inoltre

sono stati scalati opportunamente anche gli input sismici considerati nei modelli numerici al fine di poter applicare sperimentalmente la stessa forzante. In particolare, il confronto è stato effettuato solo con riferimento ai risultati numerici ottenuti dal modello analitico di impatto, sviluppato nell'ambito della seguente tesi, che considera il fenomeno della perdita di energia dovuto al comportamento visco-elastico all'interfaccia, in funzione delle proprietà meccaniche dei materiali coinvolti nell'impatto.

5.1. APPROCCIO SPERIMENTALE PROPOSTO

5.1.1. Introduzione

Le strutture composte da blocchi in muratura semplicemente appoggiate al suolo, come per esempio le colonne di un tempio, sono particolarmente vulnerabili alle oscillazioni e al ribaltamento durante gli eventi sismici: una vulnerabilità che aumenta con la loro snellezza. La modellazione analitica, e quindi anche numerica, del comportamento oscillatorio di tali strutture sottoposte a movimenti sismici rappresenta una sfida complessa. La complessità del comportamento dinamico di tali strutture multiblocco deriva principalmente dalla presenza di grandi spostamenti e rotazioni, nonché dalle non linearità introdotte da fenomeni di impatto e di attrito, che rendono la risposta di queste strutture estremamente sensibile a piccole perturbazioni del sistema [20].

In Letteratura scientifica sono presenti alcuni studi numerici e sperimentali che discutono queste problematiche: Yim et al. [12] hanno evidenziato, attraverso modelli di simulazioni numerica, che l'analisi del comportamento dinamico di queste strutture dovrebbe basarsi impiegando numerosi e differenti input sismici al fine di indagare un più ampio range di risposta dinamica. È quindi fondamentale adottare un approccio statistico per comprendere appieno il comportamento di un corpo rigido sotto eccitazione dinamica. Questa elevata sensibilità non è limitata al dominio numerico, ma si manifesta ovviamente anche in ambito sperimentale.

Nonostante le difficoltà intrinseche, diversi studi hanno dimostrato che è possibile ottenere un certo grado di ripetibilità nel comportamento osservato, in funzione del tipo di sollecitazione e della natura (ovvero delle proprietà meccaniche) dei corpi a contatto. Ad esempio, Wong e Tso [25] hanno analizzato dettagliatamente il comportamento di una struttura rigida e snella sottoposta a un'eccitazione dinamica

sinusoidale unidirezionale. Hanno osservato sperimentalmente diversi schemi di movimento stazionario, confrontandoli con i risultati ottenuti da simulazioni numeriche. ElGawady et al. [47], studiando blocchi a base rettangolare realizzati con materiali diversi, hanno dimostrato che prove di oscillazione libera o di rilascio eseguite su vari tipi di supporti possono evidenziare una certa ripetibilità della direzione principale del moto, specialmente quando la fondazione è rigida. Successivamente, Mathey et al. [112] hanno mostrato che, in prove di rilascio su una fondazione rigida utilizzando un sottile blocco parallelepipedo con piccoli difetti geometrici, sia i movimenti nel piano sia quelli fuori piano presentano una certa ripetibilità per un periodo limitato. Peña et al. [39] hanno ottenuto una ripetibilità sperimentale del movimento per un periodo relativamente lungo durante prove di oscillazione eseguite su blocchi a base rettangolare in presenza di accelerazioni armoniche, mentre la ripetibilità diminuiva in presenza di accelerazioni casuali.

Alla luce di queste considerazioni, è stato progettato e sviluppato un setup sperimentale per lo svolgimento di prove dinamiche su provini multiblocco (con spigoli raccordati e non raccordati) semplicemente appoggiati su piani di materiali differenti. Le prove sono state condotte mediante l'ausilio di un attuatore dinamico progettato per prove in laboratorio e in situ su strutture in muratura anche di notevole massa. La controllabilità dei test condotti in termini sia di input (forzante indotta) che di output (misura di spostamenti, velocità e accelerazioni) è stata garantita mediante il sistema di gestione dell'attuatore dinamico che ha permesso di implementare le forzanti dinamiche scalate dal modello numerico di riferimento, mediante l'ausilio di un sensore dinamico come un accelerometro piezoelettrico nonché mediante l'impiego della tecnologia DIC (Digital Image Correlation) per l'acquisizione continua delle immagini utili per la misura dei parametri necessari per la caratterizzazione del fenomeno del rocking. Il setup e il protocollo di prova sviluppato ha garantito non solo l'accuratezza dei dati sperimentali acquisiti ma anche la ripetibilità delle prove.

I risultati sperimentali ottenuti sono stati confrontati con risultati sperimentali presentati in letteratura che hanno confermato l'efficacia dell'approccio sperimentale proposto. Inoltre dal confronto dei risultati sperimentali con quelli teorici ottenuti con il classico modello di Housner e con il modello proposto in questa tesi è stato possibile non solo validare quest'ultimo ma anche evidenziare alcuni importanti aspetti osservati sperimentalmente e che richiedono ulteriori approfondimenti futuri.

5.1.1.1. Modelli in scala

I modelli ingegneristici rappresentano strumenti indispensabili per lo studio di fenomeni complessi, specialmente quando si confrontano strutture reali con modelli realizzati in una scala ridotta. L'utilizzo di modelli in scala consente di analizzare e comprendere il comportamento di una struttura in un ambiente più gestibile e controllabile (come l'ambiente di un laboratorio), agevolando l'indagine di fenomeni fisici che potrebbero risultare difficili o troppo costosi da studiare direttamente sulla struttura reale.

Sebbene i modelli siano spesso realizzati in scala ridotta rispetto alla struttura oggetto di analisi, questa non è una regola fissa. In alcuni casi, i modelli possono essere costruiti mantenendo la stessa scala della struttura reale o persino ingranditi per esaminare fenomeni locali in particolari dettagli della struttura. Tuttavia, la "scalatura" richiede una rigorosa applicazione delle leggi di similitudine, fondamentali per garantire che i fenomeni fisici osservati nel modello scalato siano rappresentativi di quelli osservati nella struttura reale di riferimento.

In questo contesto, l'analisi dimensionale di Buckingham [113], nota anche come teorema Π , assume un ruolo cruciale. Questo approccio teorico permette di identificare i parametri adimensionali che governano il comportamento di un sistema fisico, stabilendo una relazione coerente tra il modello in scala e la struttura reale. Attraverso l'analisi dimensionale, è possibile assicurarsi che le leggi fisiche rimangano valide nel passaggio da una scala all'altra, garantendo che i risultati ottenuti siano accurati e applicabili alla struttura finale.

È pertanto essenziale distinguere tra modello e prototipo nel processo di analisi ingegneristica, soprattutto quando si parla di modelli in scala rispetto a prototipi a grandezza naturale. Un modello è una rappresentazione semplificata di un sistema reale, utilizzata principalmente per studiare specifici aspetti del comportamento del sistema in un ambiente controllato. A seconda degli obiettivi dello studio, il modello può essere ridotto, ingrandito o mantenuto alla scala della struttura reale. Il suo scopo principale è facilitare la comprensione di fenomeni complessi, testare ipotesi teoriche e simulare condizioni operative in modo controllato.

Il prototipo, d'altro canto, è una versione preliminare e funzionale del sistema finale a grandezza naturale. A differenza del modello in scala, il prototipo è costruito per rappresentare fedelmente tutte le caratteristiche della struttura reale. Viene utilizzato per verificare la funzionalità complessiva del sistema in condizioni operative reali, identificare eventuali problemi pratici e apportare le necessarie modifiche pri-

ma della produzione su larga scala.

In sintesi, il modello in scala è utile per esplorare e comprendere i fenomeni fisici in modo dettagliato e controllato, mentre il prototipo reale è impiegato per verificare e ottimizzare la funzionalità del progetto in condizioni operative reali. Entrambi sono strumenti complementari e fondamentali nel processo di progettazione ingegneristica, permettendo di passare con successo dalla fase teorica a quella pratica, assicurando che il sistema finale soddisfi pienamente i requisiti progettuali e operativi.

5.1.1.2. Fattore di scala temporale dei segnali di impulso

Quando le dimensioni del modello R_m differiscono da quelle del prototipo R_p , è necessario adattare i segnali del moto del suolo nel dominio del tempo per rispettare i principi della similitudine. Consideriamo, ad esempio, una storia temporale dell'accelerazione del suolo caratterizzata da una determinata Peak Ground Acceleration (PGA) e un incremento temporale Δt . Questo segnale può essere scomposto in una serie di Fourier, con ampiezze $a_{p,i}$ e frequenze $\omega_{p,i}$. Secondo l'analisi dimensionale, la risposta F di un sistema oscillante è funzione di vari parametri:

$$F\left(p, t, \frac{\omega_p}{p}\right) \quad (5.1)$$

dove p è inversamente proporzionale alla radice quadrata della dimensione R del blocco oscillante. Per garantire la similitudine dinamica tra il modello m e il prototipo p , è fondamentale che il tempo adimensionale pt sia identico in entrambi i sistemi. Questa condizione si esprime con la relazione:

$$p_m \cdot \Delta t_m = p_p \cdot \Delta t_p \quad (5.2)$$

Da questa Equazione, si deduce che l'incremento temporale Δt_m per il modello deve essere scalato in funzione del rapporto tra le dimensioni del modello e del prototipo:

$$\Delta t_m = \Delta t_p \cdot \sqrt{\frac{R_m}{R_p}} \quad (5.3)$$

Questa condizione implica che il segnale di ingresso, rappresentato dalla storia temporale del moto del suolo con un determinato passo temporale di registrazione Δt_p , debba essere scalato nel tempo in base alla radice quadrata del rapporto tra le dimensioni del modello e del prototipo. Di conseguenza, se il modello è più piccolo

rispetto al prototipo ($R_m < R_p$ e $p_m > p_p$), il segnale di moto del suolo deve essere riprodotto a una velocità maggiore durante l'esperimento. Questo si traduce in un aumento della frequenza angolare $\omega_{p,m}$ nel modello, affinché anche il secondo termine dell'Equazione soddisfi la condizione di similitudine.

In pratica, gli impulsi analitici del movimento del suolo, come le onde trigonometriche o gli impulsi di Ricker, devono essere scalati nel tempo aumentando la loro frequenza ciclica dominante $\omega_{p,m}$, in modo che risulti superiore alla corrispondente frequenza del prototipo $\omega_{p,p}$. Questo incremento di frequenza assicura che le dinamiche osservate nel modello siano coerenti con quelle attese nel prototipo reale, garantendo così una rappresentazione fedele del comportamento sismico del sistema studiato.

5.1.2. Setup sperimentale e protocollo di prova

In questa sezione viene descritto in dettaglio il setup sperimentale e la procedura di prova impiegati per lo svolgimento degli esperimenti di rocking su n. 6 campioni di blocchi rigidi a contatto con basi aventi differenti rigidezze derivanti dalle differenti proprietà meccaniche dei materiali che le costituiscono. Il setup sperimentale comprende un attuatore idraulico dinamico, una trave rigida ad esso collegato ed un sistema di controllo in anello chiuso. Detto sistema è dotato anche di sensori idonei alla rilevazione dello spostamento e della accelerazione durante il processo di moto. In particolare mediante un trasduttore di posizione magnetostrittivo è stata possibile l'esecuzione di prove dinamiche in controllo di spostamento con modalità deterministica (sistema "real time"). Sulla trave rigidamente collegata all'attuatore è stato anche posizionato un accelerometro monoassiale. La variazione delle posizioni assunte dai campioni durante le prove è stata monitorata mediante un sensore videoestensimetrico, ossia impiegando la tecnica DIC (Digital Image Correlation). La Digital Image Correlation è una tecnica di trattamento delle immagini acquisite dai sistemi ottici, come i sensori videoestensimetrici, che consente di misurare le variazioni di spostamento di target presenti nello scenario, garantendo misurazioni estremamente precise. L'utilità di questa tecnica durante queste prove è stata soprattutto quella di non interferire durante il moto del provino con una frequenza di campionamento che ha permesso di condurre un'analisi rigorosa e approfondita delle risposte dinamiche dei blocchi sotto esame.

5.1.2.1. Sistema di prova dinamico

Gli esperimenti condotti presso il Laboratorio Ufficiale Prove Materiali "M. Salvati" del dipartimento ARCoD del Politecnico di Bari sono stati eseguiti utilizzando uno shaker monoassiale, costituito da un servo-attuatore dinamico idraulico Rexroth-Bosch (tipo 4WRREH6) con elettronica integrata, che opera a una pressione di 280 bar ed è capace di generare una forza F di 5000 daN, uno spostamento massimo di ± 200 mm e un range di frequenza operativa compreso tra 0 e 50 Hz. L'attuatore è stato collegato ad una trave rigida in acciaio la quale era posizionata su dei rolling-bearing in grado di conferire alla stessa un solo grado di libertà (*SDOF*). Un sistema di controllo in anello chiuso (sistema RT3 prodotto dalla ditta "Trio Sistemi e Misure") ha consentito di eseguire in maniera deterministica le storie temporali di spostamento che sono state utilmente implementate durante le prove di rocking.



Figura 5.1: Sistema di controllo digitale RT3

Del sistema dinamico fa parte una centrale idraulica per la generazione della pressione della portata necessaria al movimento dello shacker. Tale centrale idraulica consente di raggiungere una pressione operativa di circa 280 bar ad una portata continuativa di 250 l/min. Tuttavia poiché sul servoattuatore è installata una servovalvola avente una portata massima di 40 l/min, si è reso necessario costruire delle storie temporali in termini di spostamento che, non saturassero la portata massima ammissibile della servovalvola. Si evidenzia che l'approccio impiegato è stato quello di mantenere costante la frequenza dell'impulso, facendo variare invece l'ampiezza-

za dello stesso in modo tale da poter ottenere conseguentemente l'accelerazione di progetto di ogni prova.

Procedura numerica per la conversione dell'accelerazione in spostamento

Nell'approccio numerico alla risposta dinamica di un sistema soggetto a sollecitazioni sismiche è usuale l'implementazione diretta di una storia temporale sotto forma di accelerazione al suolo. Questo metodo consente di modellare con precisione l'impatto delle forze sismiche sul sistema, trattando l'accelerazione come una forzante che agisce sulla sua massa. Tuttavia, quando si passa dalla simulazione numerica all'implementazione sperimentale in laboratorio per lo svolgimento di prove dinamiche, sorgono alcune limitazioni legate anche a questioni che attengono alla sicurezza delle prove stesse. Infatti, nei sistemi di controllo si preferisce utilizzare come variabile di processo lo spostamento piuttosto che l'accelerazione, poiché in questo modo è possibile limitare gli spostamenti complessivi del sistema dinamico con riferimento alle sue dimensioni geometriche massime, ossia in ragione della corsa massima disponibile. Di conseguenza, durante le prove di rocking è stato necessario convertire l'accelerogramma di input nel modello numerico in un segnale di spostamento ad esso congruente.

Si precisa che nelle simulazioni numeriche, condotte in ambiente MATLAB, è stato utilizzato un impulso antisimmetrico di tipo Ricker, definito in termini di accelerazione, per rappresentare la storia temporale del moto sismico. L'onda di Ricker, con la sua caratteristica forma, è ampiamente utilizzata per simulare impulsi sismici sintetici grazie alla sua capacità di rappresentare un evento dinamico in modo conciso. Per cui, attraverso una procedura numerica che ha permesso un'integrazione doppia dell'onda di Ricker, è stato calcolato il corrispondente segnale di spostamento coerente con la forzante numerica originaria.

L'importanza di questa conversione risiede nella necessità di poter confrontare i risultati numerici e quelli sperimentali al fine di validarne il modello teorico sviluppato nella tesi. Solo attraverso un'accurata trasformazione della storia temporale dell'accelerazione in un comando di spostamento è possibile assicurare che le condizioni sperimentali riproducano fedelmente quelle simulate numericamente.

A titolo esemplificativo, nella Figura 5.2 viene presentato il confronto tra il segnale teorico di progetto (input) in termini di accelerazione di Ricker antisimmetrico ($a_p = 0.85$ g, $T_p = 0.21$ s) (a) e in termini di spostamento (b) e quello rilevato (Misurato)

durante le prove.

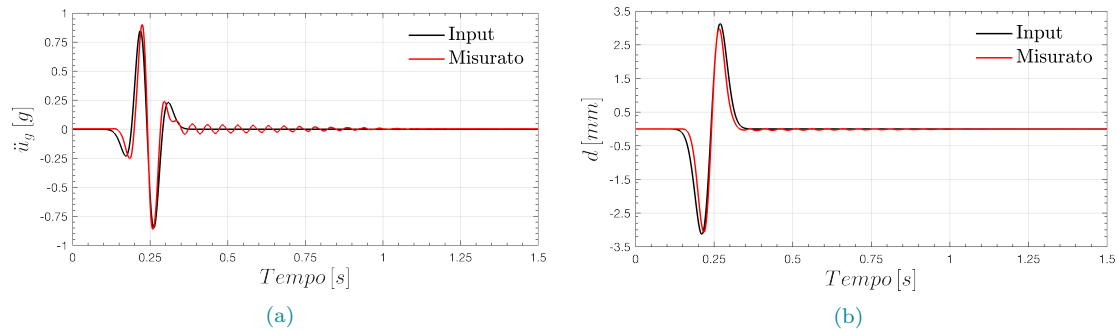


Figura 5.2: Confronto tra il segnale di progetto (input) e il segnale rilevato sperimentalmente (Misurato): (a) accelerazione; (b) spostamento

5.1.2.2. Misure accelerometriche

Nel corso delle prove sperimentali, i dati relativi all’accelerazione sono stati acquisiti tramite un accelerometro le cui caratteristiche sono riportate nella Tabella 5.1. E’ stato impiegato un accelerometro lineare monoassiale caratterizzato da un design ultra compatto e da un basso consumo energetico, con una capacità di misurazione di accelerazioni fino a $\pm 2g$ (Figura 5.3). Il sensore è stato reso solidale all’attuatore.

Modello	FGP FA101
Sampling frequency (Hz)	400
Sensitivity (mV/g)	50
Weight w/o cable (g)	< 25

Tabella 5.1: Caratteristiche tecniche del modello FGP FA101

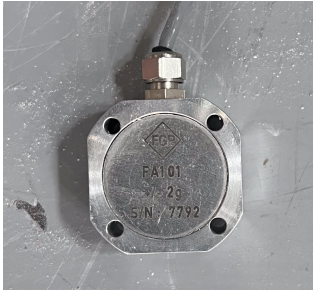


Figura 5.3: Accelerometro

5.1.2.3. Sistema DIC di tracciamento della posizione spaziale

Attualmente, la ricerca scientifica si avvale di tecnologie avanzate come la correlazione digitale delle immagini (DIC: Digital Image Correlation), un metodo di misurazione ottico altamente sofisticato che non richiede contatto diretto con l’oggetto di misura. Le tecniche DIC consistono nell’acquisizione di sequenze di immagini digi-

tali di un oggetto soggetto a variazioni di carico, tempo o stato, mediante dispositivi di *imaging* che possono includere tecnologie ottiche, elettroniche o di scansione. L'elaborazione successiva delle immagini avviene tramite algoritmi di correlazione che seguono il movimento o la trasformazione della superficie campionata, utilizzando anche tecniche di differenziazione numerica per determinare accuratamente i campi di spostamento e di deformazione. Questo approccio consente di mappare in modo dettagliato il comportamento meccanico di materiali, di componenti e di strutture sotto diverse condizioni operative.

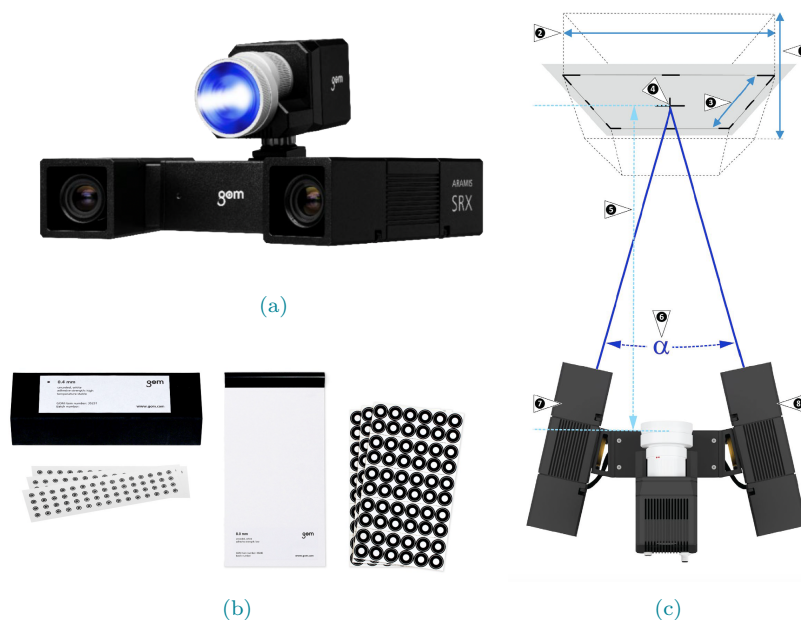


Figura 5.4: (a) Sistema di misurazione ARAMIS SRX 3D; (b) Reference points pattern ; (c) Settaggio di calibrazione del sistema di acquisizione immagine

Nell'ambito delle prove svolte è stato impiegato il sistema ARAMIS SRX 3D costituito da un sistema di misura ottico dotato di due telecamere digitali ad alta risoluzione, connesse tramite un sistema di filtraggio spaziale (HUB) a un'unità di elaborazione, e un computer ad alte prestazioni. Il sistema è inoltre supportato da una sorgente di luce blu a LED, la quale garantisce un'illuminazione ottimale dell'oggetto da analizzare, migliorando la qualità delle immagini acquisite e, di conseguenza, la precisione dei risultati. Il modulo HUB ha la funzione di gestire la comunicazione tra le telecamere e l'unità di calcolo, assicurando il corretto allineamento e la focalizzazione dei sensori, mentre il software ZEISS INSPECT Correlate, installato sull'unità di calcolo, si occupa dell'elaborazione dei dati raccolti, eseguendo analisi dettagliate e generando modelli tridimensionali dell'oggetto testato. Utilizzando una configura-

zione a doppia telecamera con lunghezza focale comune (Figura 5.4c), il sistema è in grado di acquisire dati di altissima precisione, garantendo misurazioni automatiche e la lettura accurata delle dimensioni reali dell'oggetto in esame, previa una fase di calibrazione iniziale. Il volume di misura, ispezionato dalle telecamere, dipende strettamente dalla distanza delle stesse dall'oggetto e dall'angolo del raggio misurato attraverso l'HUB. Quando l'oggetto in esame aumenta di dimensione, diventa necessario ampliare i parametri di acquisizione, utilizzando fasci di misura più estesi per mantenere la copertura dell'intera superficie.

Un aspetto fondamentale nell'esecuzione dei test sperimentali è stata la sincronizzazione della frequenza di campionamento del sistema ARAMIS con altri dispositivi di misura, come gli accelerometri e il sistema di controllo dell'attuatore dinamico. Questa sincronizzazione ha permesso di uniformare la raccolta dei dati, semplificando il processo di post-elaborazione e assicurando la coerenza tra le misure acquisite dai diversi strumenti. La frequenza di campionamento utilizzata per il sistema ARAMIS è stata mantenuta tra 200 e 300 Hz, in linea con le altre apparecchiature, garantendo così un'accurata integrazione dei dati raccolti.

5.1.3. Setup di prova

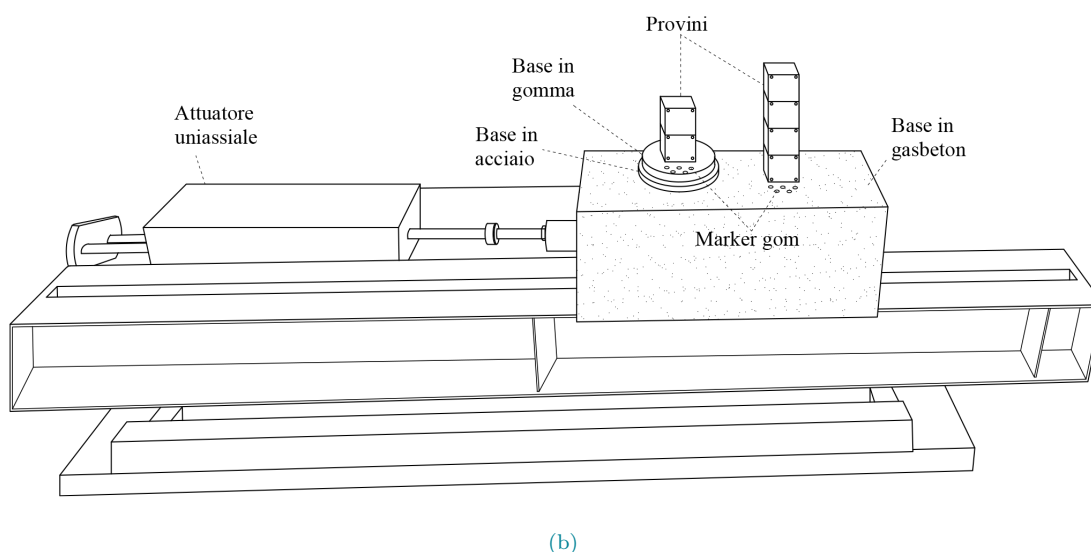
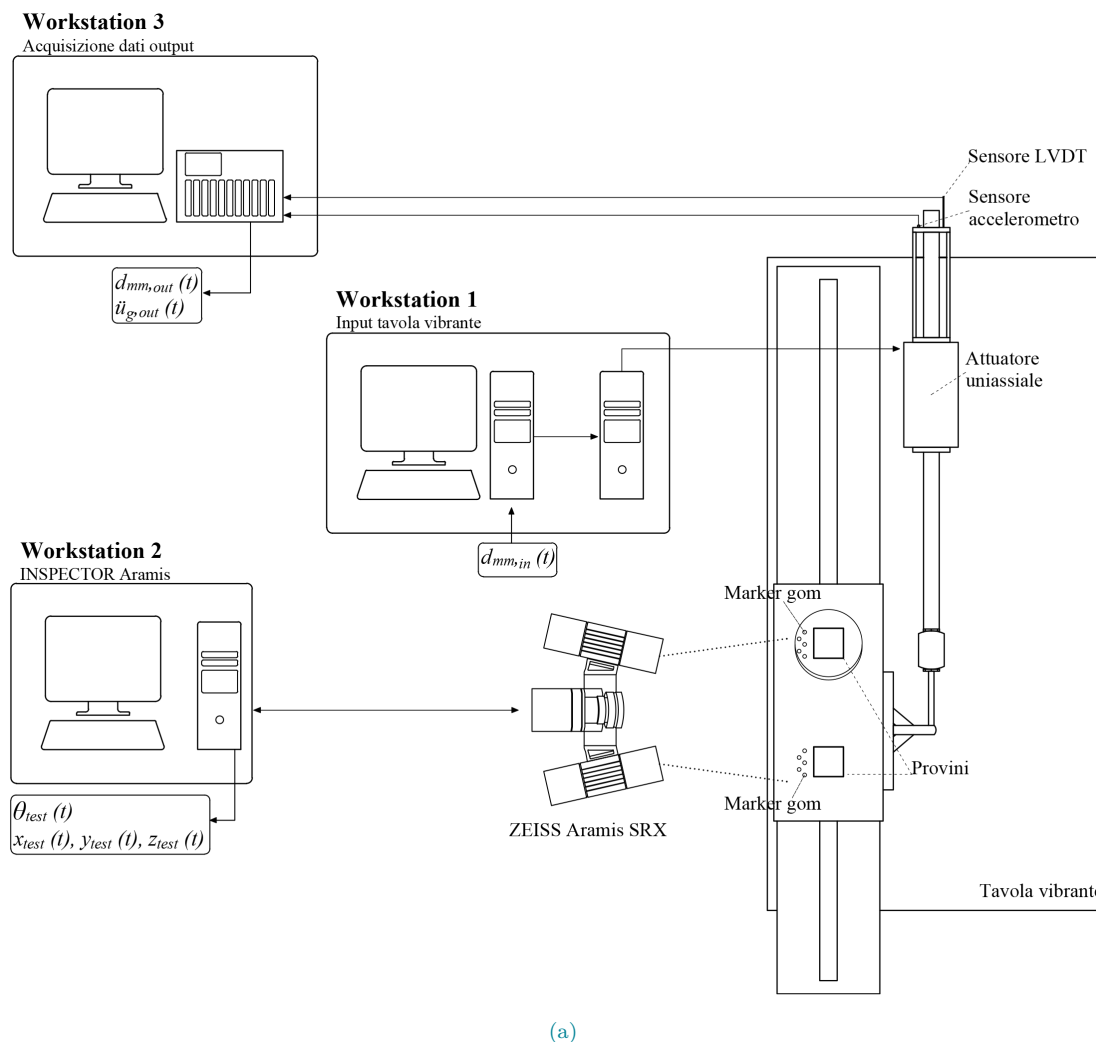


Figura 5.5: (a) Layout del setup di prova; (b) vista assometrica del banco di prova

5.1.4. Modelli in scala

In questa sezione viene illustrata la fase di progetto e di realizzazione di modelli in scala ridotta dei casi di studio reali studiati numericamente. In particolare sono stati realizzati due modelli differenti a seconda della presenza o meno degli spigoli raccordati che simulano il danneggiamento subito dai blocchi durante il rocking. I risultati sperimentali ottenuti dalle prove dinamiche sono stati confrontati con altri risultati sperimentali presenti in Letteratura al fine di validare il setup e il protocollo di prova proposto.

I risultati conseguiti hanno fornito preziosi spunti per l'ulteriore sviluppo e ottimizzazione di modelli multiblocco previsionali più accurati che possano anche rappresentare il comportamento di elementi strutturali geometrici più complesse come il trilito e gli archi.

5.1.4.1. Provini

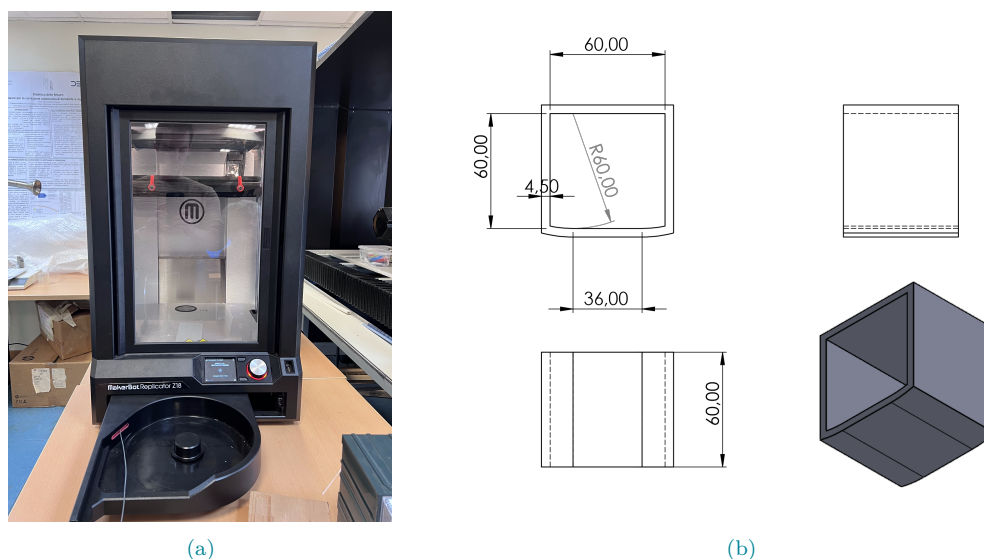


Figura 5.6: (a) Stampante 3D MakerBot Replicator Z18; (b) Disegni tecnici del modello progettato per la stampa 3D e disegno tecnico aggiuntivo.

Nel contesto delle prove sperimentali, si precisa che i campioni da testare sono stati realizzati con malta cementizia. Per il loro confezionamento, sono state impiegate particolari casseforme in PLA (acido polilattico) realizzate mediante tecnologia di stampa 3D. In particolare, sono stati creati due moduli standard di cassero (in presenza e in assenza di raccordo), caratterizzati dalle dimensioni 60x60 mm e aventi

spessore pari a 4 mm, utilizzando una stampante MakerBot Replicator Z18 ubicata presso il laboratorio di fabbricazione digitale del Dipartimento di Ingegneria Elettrica e dell'Informazione (DEI) del Politecnico di Bari (Figura 5.6). I blocchi modulari così realizzati presentano una geometria accuratamente controllata, grazie alla precisione della stampa 3D, garantendo così la ripetibilità e l'affidabilità dei risultati sperimentali.

È opportuno evidenziare che i blocchi modulari fabbricati consentono la realizzazione di provini in scala con altezze variabili che dipendono dal numero di moduli impiegati. Questa modularità ha fornito grande flessibilità nella sperimentazione, permettendo di variare le dimensioni dei campioni senza la necessità di creare nuovi stampi per ciascuna configurazione. Inoltre la modularità potrebbe consentire la realizzazione di provini con geometrie più articolate come i triliti e gli archi.

5.1.4.2. Caratteristiche geometriche

Come emerso dallo studio teorico del rocking, la snellezza (ossia il rapporto tra base e altezza del sistema oscillante) rappresenta il parametro significativo che governa la risposta dinamica dei sistemi multiblocco. Per cui, i provini sono stati realizzati con differenti valori di snellezza al fine di sondare un ampio range di variabilità dello stesso. Inoltre, i rapporti dimensionali dei campioni sono stati scelti al fine di poter confrontare i risultati sperimentali ottenuti con quelli ottenuti numericamente implementando il modello teorico proposto su casi di studio reali. Per cui, sono state esaminate le risposte dinamiche relative a due gruppi di provini: un primo gruppo con base piana pari a $2B = 60$ mm secondo il modello geometrico classico di Housner e avente altezze variabili (Housner Block: HB_01 - HB_03), ossia con spigoli non raccordati; un secondo gruppo con base piana pari a $2\bar{B} = 36$ mm e raccordi di 12 mm per lato (Rounded Block: RB_01 - RB_03) per rappresentare i provini con spigoli raccordati. Per ciascun gruppo, sono state testate tre diverse configurazioni dipendenti dalla snellezza, come riportato in Tabella 5.2. Tutti i provini sono stati realizzati presso il Laboratorio Ufficiale Prove Materiali "M. Salvati" del dipartimento ARCoD del Politecnico di Bari.

	$2H$	$2B$	R	b	$2\overline{B}$	$\tan \alpha$	r	ρ	ψ	m
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[-]	[mm]	[-]	[-]	[kg]
HB_01	120	60	67.1	-	60	0.50	-	-	-	0.8738
HB_02	180	60	94.9	-	60	0.33	-	-	-	1.1314
HB_03	240	60	123.7	-	60	0.25	-	-	-	1.7469
RB_01	120	60	67.1	12	36	0.50	60	0.50	0.2014	0.8738
RB_02	180	60	94.9	12	36	0.33	60	0.33	0.2014	1.1314
RB_03	240	60	123.7	12	36	0.25	60	0.25	0.2014	1.7469

Tabella 5.2: Caratteristiche geometriche dei modelli in scala progettati per i test sperimentali

5.1.5. Prove preliminari di oscillazione libera

Setup sperimentale

Per ciascuno dei modelli appartenenti ai due gruppi, sono state eseguite prove di oscillazione libera, variando il materiale della base di appoggio tra: acciaio (a), gomma (g) e calcestruzzo aerato autoclavato (gb).

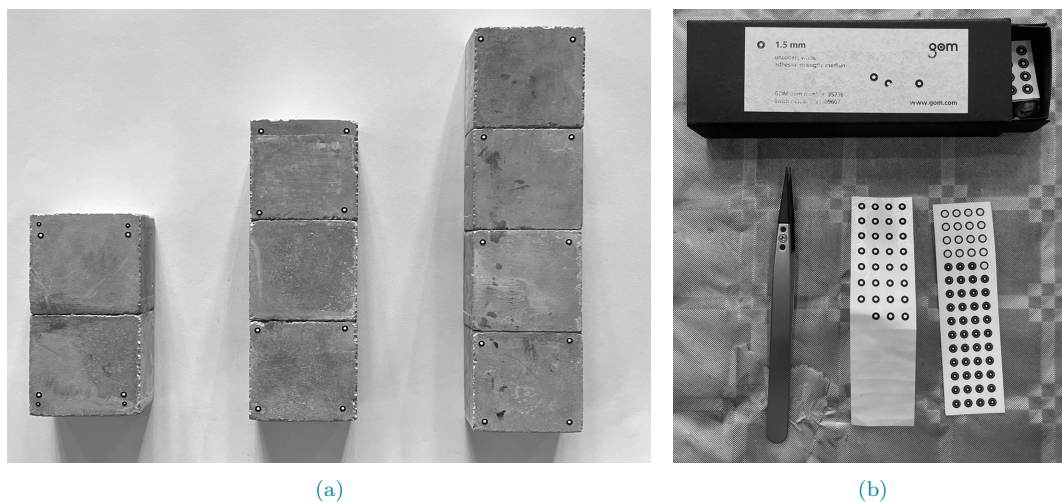


Figura 5.7: (a) Foto dei provini per i test sperimentali; (b) Marker videoestensimetrico GoM da 1.5mm per le acquisizioni DIC

La scelta di variare il materiale alla base è stata motivata dal validare il nuovo modello teorico di impatto, ampiamente descritto nel Capitolo 4, al fine di tener conto delle proprietà meccaniche specifiche dei materiali all'interfaccia durante il rocking. Il sistema da testare costituito dal provino e dal suo appoggio è stato reso solidale

alla trave rigida collegata all'attuatore dinamico. A seconda dell'altezza del provino, sono stati posizionati differenti numeri di marcatori videoestensimetrici da 1.5 mm utili per la rielaborazione delle immagini acquisiti mediante tecnica DIC: 4 per il modello più basso (120 mm), 8 per quello intermedio (180 mm) e 10 per il più alto (240 mm). Inoltre, ulteriori marcatori sono stati applicati direttamente sulla superficie della base di appoggio per poter compensare, dallo spostamento complessivo dei marcatori posizionati su ciascun provino, lo spostamento registrato alla base. Queste prove preliminari di oscillazione libera hanno permesso di identificare l'angolo di oscillazione θ di ogni sistema multiblocco. Questa misura è stata effettuata rielaborando le immagini acquisite (con frequenza di campionamento pari a 300 Hz) durante il moto mediante il software INSPECT Correlate.

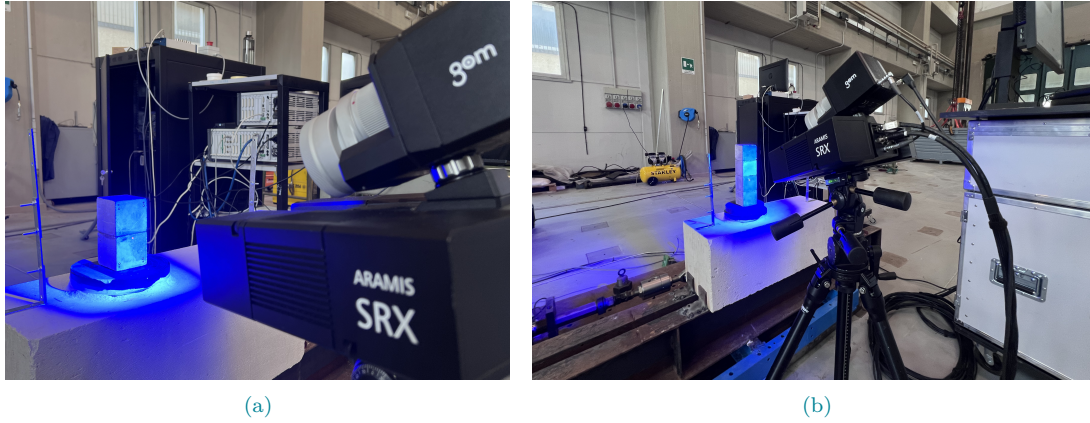


Figura 5.8: Configurazione sperimentale per la prova di oscillazione libera

A partire dai dati sperimentali ottenuti, è stato calcolato il parametro di frequenza p , fondamentale per la validazione del modello teorico proposto. La sua determinazione si basa sulla relazione non lineare tra il periodo di oscillazione T_R e il parametro p , come descritto dall'Equazione (2.8) e qui di seguito richiamata:

$$T_R = \frac{4}{p} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{1 - \theta_0/\alpha} \right)$$

con θ_0 che rappresenta l'angolo massimo di inclinazione per un semiciclo di oscillazione, di durata $T_R/2$. Per ciascun tipo di materiale costituente la base di appoggio, i valori di p sono stati calcolati su N semicicli di oscillazione e successivamente mediati per ottenere un valore rappresentativo del parametro di frequenza.

L'uso di differenti materiali per la base di appoggio ha permesso di analizzare l'influenza che le diverse proprietà meccaniche dei materiali possono avere sia nell'im-

patto che sul valore che assume il CoR durante il moto oscillatorio del sistema. Le variazioni nei valori di p forniscono un'indicazione diretta di come i materiali influenzano sull'oscillazione e sul comportamento globale del modello, contribuendo alla validazione sperimentale del modello teorico sviluppato.

Confronto tra risultati sperimentali e risultati numerici

Il blocco HB_01_a con angolo di inclinazione iniziale $\theta_0 = 0.20$ [rad], che all'istante di tempo iniziale $t_0 = 0$ s ha energia cinetica nulla, così come la sua velocità angolare $\dot{\theta}_0 = 0$ [rad/s], dopo il verificarsi del primo impatto con la base in acciaio all'istante di tempo $t_1 = 0.1120$ s che corrisponde ad un periodo $T_R/4$ utilizzando l'Equazione (2.8), in corrispondenza di un periodo pari a $T_R/4 = 0.1112$ s, durante l'inversione del moto, e l'inizio del sollevamento, subisce una traslazione dovuta al basso coefficiente di attrito μ_s .

Diverso, invece, è il suo comportamento (HB_01_gb) quando viene lasciato libero di oscillare, con un angolo iniziale $\theta_0 = 0.15$ [rad], su una base in cls aerato autoclavato. Il blocco oscilla attorno ai suoi spigoli di base per poi arrestarsi dopo 2 s. A partire dai suddetti dati sperimentali, i parametri citati sono stati ricalcolati come segue:

$$p = 3.7919 \text{ s}^{-1} \quad (5.4)$$

Il coefficiente di restituzione, nel moto di oscillazione libera, è stato determinato confrontando le energie totali prima e dopo ogni impatto del provino. Questa operazione ha richiesto una calibrazione specifica per ciascun modello e per ogni materiale della base d'appoggio. Analiticamente, il coefficiente di restituzione si definisce come il rapporto tra i quadrati delle velocità angolari subito dopo e subito prima l'impatto. Nell'approccio sperimentale, invece, si è ipotizzato che l'energia venga dissipata solo al momento dell'impatto, con l'energia potenziale V (2.20) assunta nulla in quell'istante. Durante la fase di oscillazione, si è considerata la conservazione dell'energia. Di conseguenza, l'energia cinetica T (2.19) al momento dell'impatto è stata equiparata all'energia potenziale massima raggiunta durante il corrispondente semi-ciclo di oscillazione, poiché le due forme di energia si convertono alternativamente.

Applicando il principio di conservazione dell'energia in questo contesto, si è ottenuto il coefficiente di restituzione η_{test} , che riflette la dissipazione energetica associata agli impatti, fornendo una caratterizzazione dettagliata del comportamento dinamico del sistema e delle proprietà dei materiali coinvolti. Per il provino HB_1_gb si ottiene

quindi un valore del CoR pari a:

$$\eta_{test} = \frac{V_{i+1}}{V_i} \quad (5.5)$$

$$\eta_{test} = 0.66351$$

Il valore teorico del coefficiente di restituzione, calcolato utilizzando l'Equazione (2.31), risulta essere pari a $\eta_H = 0.70$. Questo valore implica che, assumendo valida l'ipotesi della Conservazione del Momento Angolare (CoMA), il sistema dovrebbe presentare una perdita di energia inferiore del 5,23% rispetto a quanto osservato sperimentalmente. Tuttavia, contrariamente al comportamento teorico che prevede un coefficiente di restituzione costante pari a η_H , i dati sperimentali mostrano una significativa variabilità del coefficiente di restituzione ad ogni impatto. In particolare, i valori misurati ad ogni impatto sono: 0.6709, 0.6637, 0.6104, 0.7227, 0.6932, 0.6179, 0.7244, 0.694, 0.7233 e 0.5138. Questi risultati, rappresentati in Figura 5.9 evidenziano che, in condizioni reali, il coefficiente di restituzione non è costante ma varia, talvolta in maniera marcata, da un impatto all'altro.

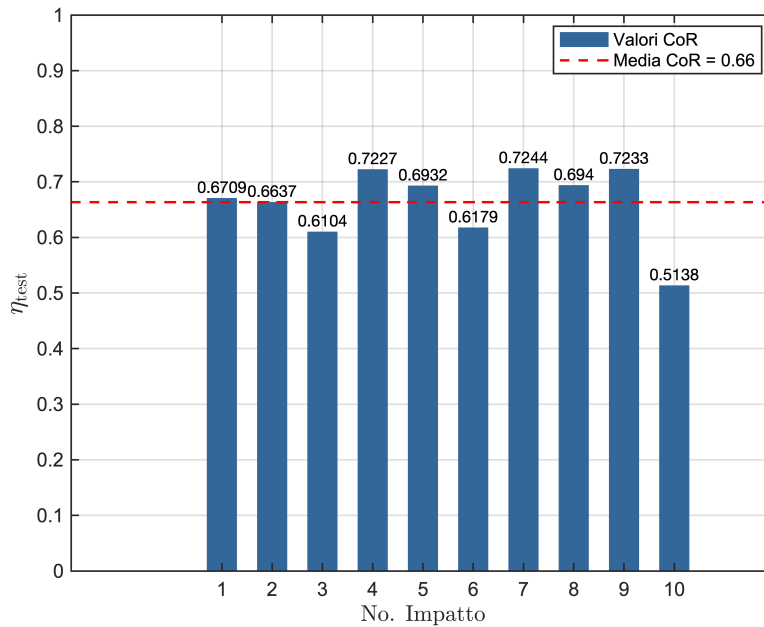


Figura 5.9: Variazione del Coefficiente di Restituzione (CoR) in funzione del numero di impatti durante il moto di rocking relativo al provino HB_01_gb. Il grafico a barre rappresenta i valori sperimentali di η misurati per ciascun impatto.

La variazione non trascurabile del coefficiente può essere attribuita alla presenza di ulteriori meccanismi dissipativi non considerati nel modello teorico classico, basato

sulla CoMA attribuito a una combinazione di diversi fattori, come la presenza di interfacce di contatto irregolari, difetti geometrici, un centro di massa non centrato, inclinazione del blocco inferiore. In particolare, gli effetti di rotazione attorno all'asse z possono contribuire a questa variabilità. Le rotazioni fuori piano introdotte durante gli impatti alterano la distribuzione del momento angolare e dell'energia nel sistema, influenzando così il valore del coefficiente di restituzione misurato. Pertanto, per una modellazione più accurata del comportamento del sistema, è fondamentale considerare anche questi effetti rotazionali.

La Tabella 5.3 mostra il confronto tra i valori medi del CoR ottenuti sperimentalmente con quelli del CoR teorico, calcolato secondo la formulazione di Housner. A titolo esemplificativo, la Figura 5.10 traccia il valore assoluto dell'angolo di oscillazione θ , ottenuto a partire dai dati sperimentali relativi al provino RB_02_a. La storia temporale mostra una modesta risposta asimmetrica.

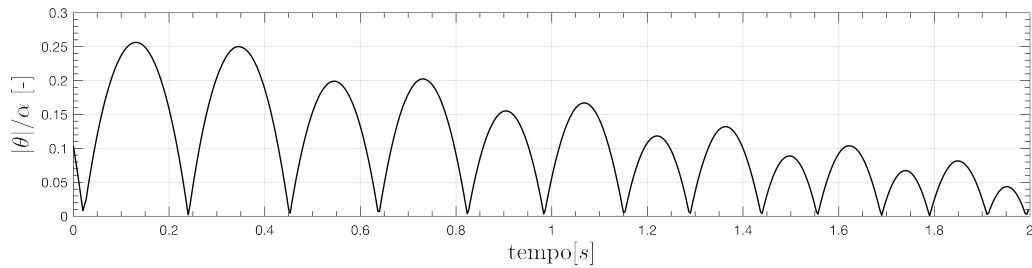


Figura 5.10: Storia temporale di $|\theta|/\alpha$ relativa al provino RB_02_a

HB			RB		
	η_H	η_{test}		η_H	η_{test}
No.			No.		
1	0.70	0.66351	1	0.70	0.84533
2	0.85	0.9102	2	0.70	0.92012
3	0.85	0.93844	3	0.85	0.86792
4	0.85	0.94371	4	0.85	0.92691
5	0.91	0.87879	5	0.85	0.90763
6	0.91	0.89129	6	0.91	0.84613
7	0.91	0.91081	7	0.91	0.81834

Tabella 5.3: Confronto tra i valori del CoR teorico (η_H) secondo il modello di Housner e il CoR sperimentale (η_{test})

Una risposta differente si è avuta per il blocco RB_01_a con una inclinazione iniziale al tempo t_0 pari a $\theta_0 = 0.16$ [rad], che non subisce scorrimento, nonostante il basso

coefficiente di attrito μ_s all'interfaccia; inoltre l'effetto e la presenza dei raccordi agli spigoli, inverte la situazione: le ipotesi di Housner sottostimano notevolmente la perdita di energia. Sembra che l'aggiunta dei raccordi, trasli il punto di azione delle forze d'impatto lontano dall'asse di simmetria, aumentando così la dissipazione di energia.

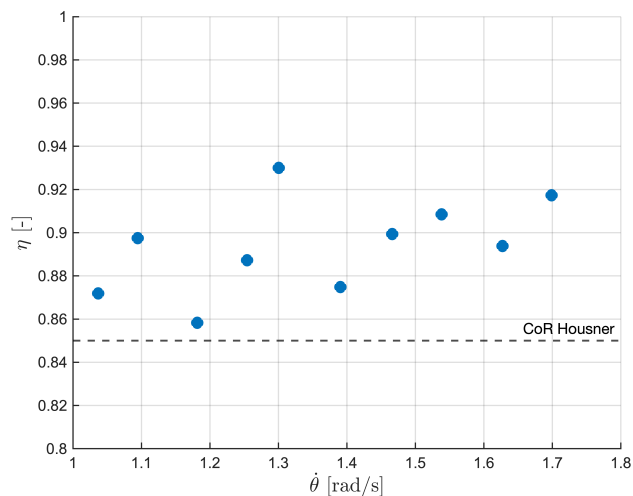
$$p = 4.1489 \text{ s}^{-1}$$

$$\eta_{test} = 0.84533$$

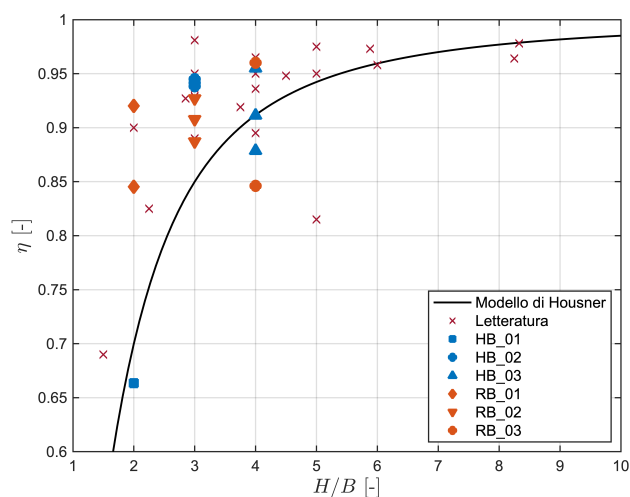
La Figura 5.11a presenta i valori sperimentali del coefficiente di restituzione η_{test} in funzione della velocità angolare massima $\dot{\theta}$ di ciascun ciclo, relativi al test rappresentativo HB_02_a. È importante notare che l'andamento del grafico inizia dal lato destro e procede verso il lato sinistro, riflettendo la progressiva diminuzione della velocità angolare nel tempo. In questa figura è riportato anche il CoR teorico relativo al modello classico di Housner, calcolato mediante l'Equazione (2.31), basata sull'ipotesi di conservazione del momento angolare. Questo valore teorico prevede un CoR costante durante l'intera risposta. Tuttavia, i dati sperimentali mostrano una variazione di η : si osserva una diminuzione graduale nel tempo e una maggiore dispersione dei valori nelle fasi finali del moto.

La Figura 5.11b, invece, riporta i valori di CoR ottenuti da tutti i test eseguiti in questo studio (sia per blocchi con spigoli raccordati, che per blocchi classici non raccordati), insieme ai valori sperimentali disponibili in letteratura [21, 42, 44, 47, 114–116] e al CoR teorico del modello di Housner.

Nel complesso, la Figura 5.11b mostra che i risultati ottenuti dalle prove di oscillazione libera condotte sono in accordo con i risultati sperimentali mostrati in Letteratura. Le discrepanze tra i valori sperimentali e quelli teorici possono essere attribuite, come evidenziato in questa ricerca, alla violazione dell'ipotesi di impatto elastico su cui si basa il calcolo di η_H secondo il modello di Housner (ovvero l'assenza di deformazioni plastiche/indentazioni alle asperità superficiali). In effetti, una parte dell'energia viene dissipata durante l'impatto a causa delle proprietà meccaniche di materiali costituenti, che rendono l'interfaccia deformabile diversamente da quanto ipotizzato nel modello di Housner.



(a)



(b)

Figura 5.11: (a) Valori di η sperimentali rispetto a quelli teorici di Housner per una prova rappresentativa di oscillazione libera del modello HB_02_a; (b) confronto dei valori di CoR stimati per tutte le prove di rocking con i valori ottenuti da prove sperimentali proposte in letteratura e con il modello teorico di Housner [3].

Osservazioni

- Si osserva che per i campioni HB_02_g, HB_03_g e RB_02_g, è stata riscontrata una differenza superiore al 10% tra gli impatti avvenuti sul lato sinistro e quelli avvenuti sul lato destro. Questo risultato sembra essere riconducibile ad un errore nella realizzazione di campioni perfettamente simmetrici e mette in luce possibili imprecisioni nelle misurazioni.

- Si è inoltre osservato che, in generale, il coefficiente di restituzione tende a diminuire per impatti a bassa velocità, implicando un aumento del rapporto di smorzamento. Questo fenomeno spiega perché un blocco in oscillazione si arresta dopo un numero finito di impatti, contrariamente a quanto prevedrebbe l'ipotesi di Housner. In effetti, negli urti a bassa velocità, il peso del campione non è trascurabile rispetto alle forze impulsive generate dall'impatto, rendendo non valida l'ipotesi di Housner, secondo cui l'impatto è istantaneo. Il peso contribuisce significativamente alla relazione impulso-momento, influenzando il rallentamento del moto.

5.1.6. Prove di rocking mediante attuatore dinamico

Fattore di scala dei moti al suolo

La risposta di un oscillatore rocking è fortemente influenzata dalle sue dimensioni [3] ovvero dal parametro α che definisce la "snellezza": se confrontiamo strutture a dondolo snelle rispetto a strutture a dondolo meno snelle, sottoposte allo stesso moto del terreno, le prime risultano essere più stabili rispetto alle seconde. Come spiegato nelle Sezioni precedenti, l'effetto delle dimensioni dei blocchi oscillanti si manifesta in modo opposto rispetto alla variazione della frequenza al quadrato del moto del suolo: un aumento delle dimensioni comporta una diminuzione della frequenza naturale dell'oscillatore. Per questo motivo, il periodo T_p dei moti generati e implementati in fase sperimentale è stato scalato secondo l'Equazione (5.3), per consentire una corretta analisi sperimentale.

Per cui, al fine di poter effettuare un confronto tra i risultati numerici ottenuti da modelli dei sistemi multiblocco in scala reale e i risultati sperimentali ottenuti sui modelli realizzata in una scala ridotta, è stato necessario "scalare" i moti del suolo applicati alle strutture reali, sia in termini di frequenza che di ampiezza, utilizzando adeguati fattori di similitudine. Questo procedimento si è basato sulla applicazione del teorema di Buckingham [113].

Il teorema di Buckingham afferma che, dato un processo fisico che dipende da n grandezze, è possibile descriverlo tramite una funzione di soli $(n - k)$ gruppi adimensionali, dove k rappresenta il numero delle grandezze fondamentali del sistema. Nel modello numerico sono stati testati tre prototipi di colonne reali, con altezze $2H$ pari a 6 m, 9 m e 12 m, per esaminare l'influenza delle dimensioni sulla stabilità della risposta del sistema con periodi di impulso pari a 1.2, 1.75 e 1.5 s, per cui sono

state scelte le dimensioni dei modelli in scala ridotta testati sperimentalmente come riportate in Tabella 5.2. I moti del suolo nei modelli sperimentali sono stati scalati nel tempo di un fattore pari a $\sqrt{0.02}$, corrispondenti ad un periodo dei modelli in scala: T_p^m di 0.25, 0.17 e 0.2121 s.

Definizione del protocollo sperimentale in termini di parametri dinamici

La configurazione finale dei campioni del tipo HB_n, è stata testata utilizzando 3 diverse onde di Ricker antisimmetriche, una per ogni geometria, variando per ogni impulso, l'ampiezza massima. Le onde di Ricker hanno avuto una frequenza f con il seguente range [4.50; 5.95; 4.715] Hz e un periodo di impulso T_p che assume il seguente range [0.22; 0.168; 0.21] s. Alla scala del prototipo questi valori corrispondono ai periodi T_p pari a [1.20; 1.75; 1.50] s.

No.	Provini	Antisimmetrica Ricker			
		a_p [g]	d_p [mm]	T_p [s]	f [Hz]
1	HB_01_a	0.85	3.436	0.22	4.50
2	HB_01_a	1.275	5.154	0.22	4.50
3	HB_01_a	1.70	6.873	0.22	4.50
4	HB_01_g	0.85	3.436	0.22	4.50
5	HB_01_g	1.275	5.154	0.22	4.50
6	HB_01_g	1.70	6.873	0.22	4.50
7	HB_01_g	2.125	8.591	0.22	4.50
8	HB_01_gb	0.6375	2.577	0.22	4.50
9	HB_02_a	1.50	3.466	0.168	5.95
10	HB_02_g	0.75	1.733	0.168	5.95
11	HB_02_g	1.50	3.466	0.168	5.95
12	HB_02_gb	1.50	3.466	0.168	5.95
13	HB_03_a	0.45	1.625	0.21	4.715
14	HB_03_g	0.225	0.812	0.21	4.715
15	HB_03_gb	1.35	4.875	0.21	4.715

Tabella 5.4: Elenco delle 15 prove condotte sui provini (HB) classici non raccordati



Figura 5.12: Setup sperimentale: vista frontale del provino RB_02 su base in cls autoclavato

No.	Provini	Antisimmetrica Ricker			
		a_p [g]	d_p [mm]	T_p [s]	f [Hz]
1	RB_01_a	1.9125	6.906	0.22	4.50
2	RB_01_a	2.125	8.591	0.22	4.50
3	RB_01_g	0.85	3.436	0.22	4.50
4	RB_01_g	1.275	5.154	0.22	4.50
5	RB_01_g	1.70	6.873	0.22	4.50
6	RB_01_g	2.125	8.591	0.22	4.50
7	RB_01_gb	0.85	3.436	0.22	4.50
8	RB_01_gb	1.275	5.154	0.22	4.50
9	RB_02_a	1.5	3.466	0.168	5.95
10	RB_02_a	2.25	8.125	0.168	5.95
11	RB_02_g	0.75	1.733	0.168	5.95
12	RB_03_a	0.45	1.625	0.2121	4.715
13	RB_03_g	0.225	0.812	0.2121	4.715
14	RB_03_g	0.45	1.625	0.2121	4.715
15	RB_03_g	2.025	7.312	0.2121	4.715

Tabella 5.5: Elenco delle 15 prove condotte sui provini (RB) con spigoli raccordati

5.1.7. Analisi comparativa tra risultati sperimentali e risultati numerici

L'obiettivo della campagna sperimentale esposta nel seguente paragrafo è stato principalmente quello di validare il modello analitico sviluppato per lo studio della dinamica rocking di un sistema multiblocco (a spigoli non raccordati) che tenga conto delle caratteristiche meccaniche dei blocchi al contatto, diversamente da quanto ipotizzato nel classico modello di Housner nonché in modelli teorici successivi presenti

in Letteratura. Per ulteriori dettagli sul modello teorico sviluppato si rinvia al Capitolo 4.

Durante i test, ogni campione è stato sottoposto a diversi impulsi di Ricker antisimmetrici. Si ricordi che le prove sono state monitorate da un sistema di acquisizione di immagini mediante tecnologia DIC. In particolare, grazie all'ausilio del software INSPECT Correlate, è stato possibile analizzare e calcolare, istante per istante, la storia temporale di oscillazione dei campioni, per ogni test eseguito, e al tempo stesso, osservare possibili spostamento fuori dal piano, scorrimenti durante il moto, non percepibili ad occhio nudo, data la rapidità nei primi istanti della prova. Le Figure 5.13 e 5.14 mostrano alcune delle rielaborazione relative ai provini HB_01_g e HB_02_gb ottenute mediante il software INSPECT Correlate. L'interfaccia grafica relativa alla fase di rielaborazione dei dati mostra alla destra una immagine del provino dove sono visibili i marker impiegati. Ogni marker consente di ottenere informazioni nei punti di misura in termini di spostamento, velocità e accelerazione per ogni step di acquisizione. Alla sinistra sono visibili i diagrammi relativi al singolo punto del provino indagato che mostrano la variazione nel tempo dei seguenti parametri: spostamento lungo l'asse z (spostamento fuori dal piano); velocità angolare nel piano xy ; accelerazione angolare nel piano xy ; spostamento θ . Le Figure 5.15 confrontano le storie temporali dell'angolo di inclinazione normalizzato θ/α in termini di:

- risultati sperimentali;
- soluzione numerica con il coefficiente di restituzione teorico secondo il modello classico di Housner;
- soluzione numerica con il nuovo modello teorico di contatto, ipotizzando che la dissipazione di energia avvenga solo al momento dell'impatto.

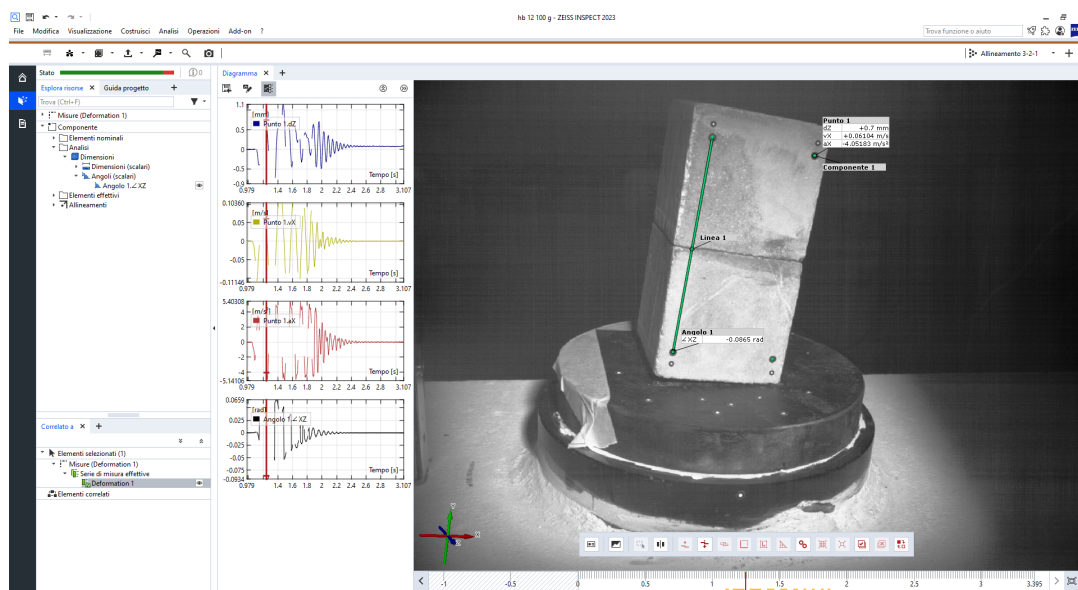


Figura 5.13: Rielaborazione tramite software INSPECT Correlate dei dati DIC relativi al provino HB_01_g

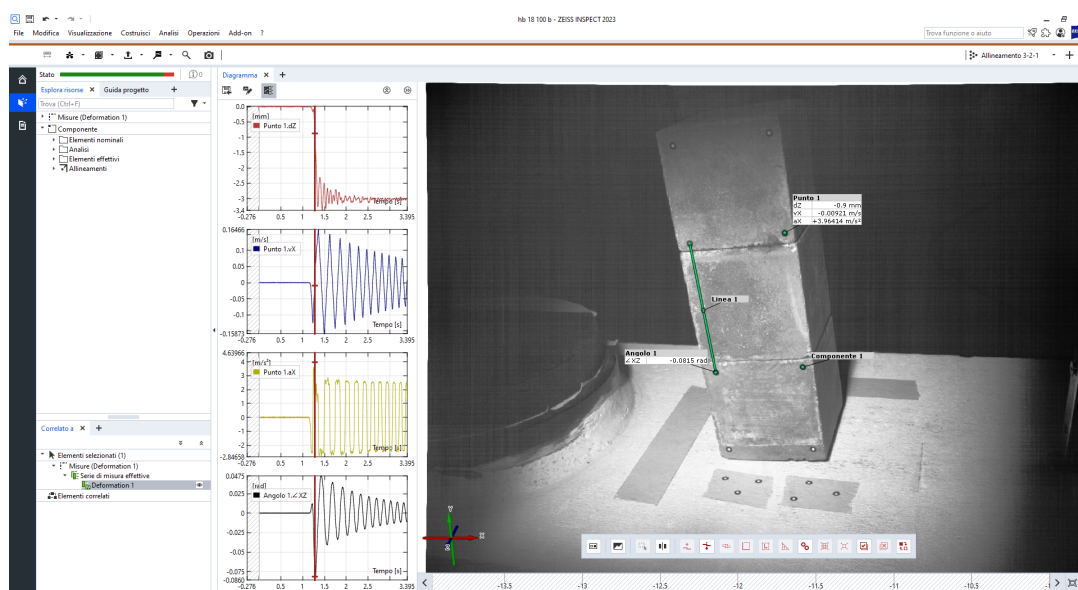


Figura 5.14: Rielaborazione tramite software INSPECT Correlate dei dati DIC relativi al provino HB_02_gb

Antisimmetrica Ricker							
HB				RB			
Th. Housner		Sperimen.	Th. proposto	Errore %	Th. Housner		Sperimen.
No.	θ_{max} [°]	θ_{max} [°]	θ_{max} [°]	[%]	No.	θ_{max} [°]	θ_{max} [°]
1	0.13671	**			1	0.28185	**
2	0.16121	**			2	0.36958	**
3	0.23904	**			3	0.13047	0.25668
4	0.13671	0.2014	0.20662	2.59	4	0.16389	0.39883
5	0.16121	0.1974	0.32108	62.60	5	0.22594	0.53925
6	0.23904	0.2640	0.32505	23.13	6	0.36958	0.60418
7	0.39975	0.6503	0.6677	2.67	7	0.13047	0.23921
8	0.04959	0.1391	0.08913	-35.91	8	0.16389	0.40142
9	0.19534	**	0.1959		9	0.19115	**
10	0.09259	0.16314	0.1586	-2.79	10	0.33031	**
11	0.19534	0.31044	0.28415	-8.47	11	0.09188	0.14170
12	0.19534	0.23399	0.2283	-2.44	12	0.10255	**
13	0.10427	**	0.1278		13	0.00	0.060
14	0.005	0.36693	0.2715	-26.00	14	0.10255	0.11387
15	0.34214	0.12	0.1327	10.58	15	0.49112	0.39142

Tabella 5.6: Confronto tra i valori degli spostamenti θ_{max} ottenuti dal modello classico di Housner, dalle prove sperimentali e numericamente dal modello teorico proposto e l'errore percentuale nel caso di provini non raccordati, e tra gli spostamenti θ_{max} nel caso di provini raccordati

In Tabella 5.6 sono riportati e confrontati i valori dell'angolo massimo di oscillazione θ_{max} , tra i diversi modelli a confronto, per sollecitazioni sismiche (onde di Ricker) antisimmetriche. Le risposte con il doppio asterisco non sono state prese in considerazione, perché durante queste prove il campione sperimentale ha subito ribaltamenti o forti scorrimenti sulla base di appoggio, dato il basso attrito.

La colonna dell'errore percentuale in Tabella 5.6, evidenzia il confronto tra i risultati sperimentali e quelli numerici ottenuti dal modello teorico proposto relativi allo spostamento massimo angolare θ_{max} . In generale, i valori dell'errore percentuale variano significativamente tra le diverse prove. Queste variazioni possono essere attribuite a diversi fattori, di seguito esaminati:

- **Prove con basso errore percentuale:** Nelle prove 4, 7 e 10, l'errore percentuale è relativamente basso, con valori rispettivamente pari a 2.59%, 2.67% e 2.78%. Questi valori indicano una buona corrispondenza tra i risultati ottenu-

ti dal modello analitico proposto (e implementato numericamente) e i risultati ottenuti dalle prove dinamiche. Ciò suggerisce che, per questi casi specifici, il modello teorico sviluppato è in grado di cogliere in modo efficace le dinamiche del fenomeno rocking, il fenomeno dell'indentazione durante l'impatto, nonché le forze di contatto in fase di compressione e restituzione.

- **Prove con errore significativo:** In alcune prove, come la 5 e la 8, si osservano errori percentuali più elevati, rispettivamente pari a 62.60% e 35.91%. Tali valori indicano una maggiore discrepanza tra i risultati numerici e sperimentali. L'errore elevato nella prova 5 potrebbe essere dovuto a semplificazioni nel modello analitico che non tengono conto di alcune caratteristiche reali del comportamento dinamico del sistema multiblocco, come la variabilità delle forze di contatto durante l'impatto, le eventuali imperfezioni geometriche del provino, e la variabile attrito che gioca un ruolo molto importante. Nella prova 8, l'errore negativo significativo potrebbe indicare che il modello proposto sottostima l'effetto dell'impatto, suggerendo una necessità di migliorare, nei casi specifici, le condizioni di impatto e restituzione.
- **Analisi globale:** Nonostante alcune discrepanze significative, la maggior parte delle prove mostra errori relativamente bassi, che variano tra il 2.59% e il 10.58%. Questi risultati suggeriscono che il modello teorico proposto riesce a cogliere correttamente il comportamento dinamico dei blocchi e quindi il fenomeno del rocking nella maggior parte dei casi. Tuttavia, le prove con errori più elevati indicano che ci sono alcune situazioni (probabilmente legate a parametri sperimentali specifici, come le imperfezioni geometriche dei blocchi o le condizioni di impatto) in cui il modello potrebbe essere ulteriormente raffinato per migliorare la sua precisione.
- **Possibili miglioramenti del modello numerico:** Le discrepanze più elevate possono suggerire la necessità di migliorare il modello, ad esempio sviluppando una modellazione più accurata delle forze di contatto durante l'impatto, considerando l'influenza dell'attrito tra i blocchi o le variazioni nella geometria durante le prove sperimentali, nonché integrando un possibile comportamento tridimensionale del sistema multiblocco per tener conto degli spostamenti fuori dal piano.

Un esempio di questo confronto è mostrato nella Figura 5.15, relativo alle prove n. 11,12 e 14,15, dove le due risposte risultano in buon accordo. Sebbene alcune storie

temporali siano state riprodotte in modo accurato dal modello numerico, prevedere l'intera storia rimane complesso. Diversamente dai sistemi elastici, infatti, il periodo degli oscillatori varia significativamente in funzione dell'ampiezza delle vibrazioni, che a sua volta è influenzata dall'energia dissipata ad ogni impatto. Questo fa sì che anche piccoli errori si accumulino, portando la soluzione numerica a deviare progressivamente dall'esperimento. Questo fenomeno, già rilevato da diversi studiosi, suggerisce la necessità di affrontare il problema del rocking in modo stocastico anziché deterministico.

Tuttavia, per gli impulsi analitici, nei quali l'angolo di inclinazione massimo si manifesta all'inizio della storia temporale, si osserva una buona corrispondenza tra i massimi dell'angolo di inclinazione ottenuti dalle simulazioni numeriche e quelli sperimentali. Questo indica che, almeno nella fase iniziale della risposta, il modello è in grado di catturare accuratamente il comportamento del sistema, nonostante le difficoltà nel prevedere l'intera evoluzione temporale del fenomeno.

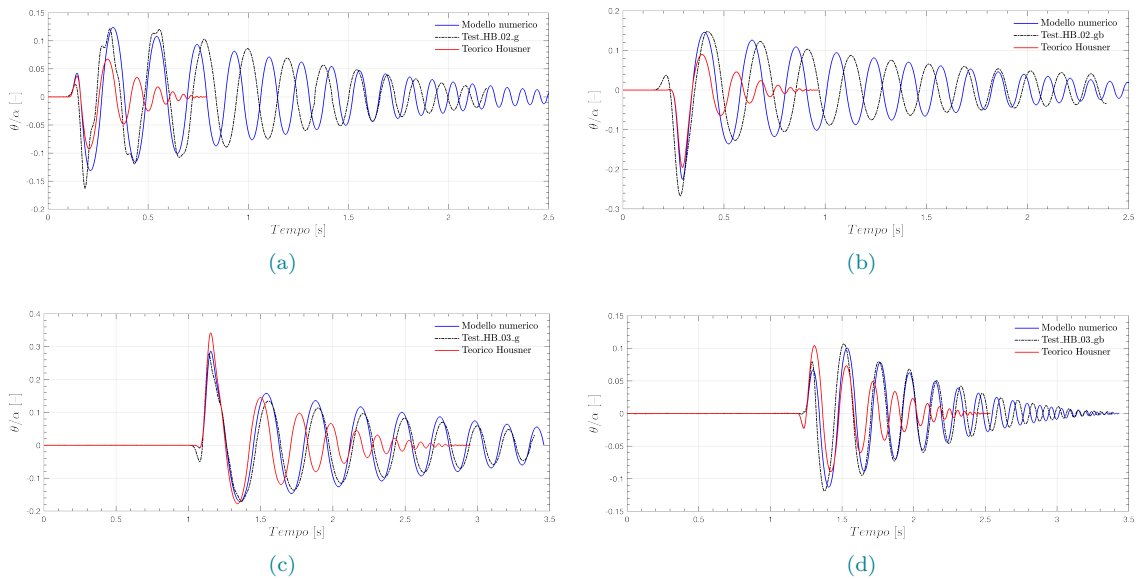


Figura 5.15: Confronto tra i vari modelli multiblocco delle storie temporali: (a) provino HB_02_g; (b) provino HB_02_gb; (c) provino HB_03_g (d) provino HB_03_gb

Per una più chiara comprensione dei risultati ottenuti si mostra un grafico a dispersione (Figura 5.16) che fornisce un confronto quantitativo tra i valori numerici di $\theta_{max,th.}$ ottenuti dal modello teorico proposto (relativi ai provini HB) e i corrispondenti valori sperimentali di $\theta_{max,test.}$, entrambi espressi in forma normalizzata rispetto al parametro α , relativamente ai casi in cui sia ha il basso errore percen-

tuale.

Per comodità, è stata inclusa la retta diagonale ($y = x$), la quale rappresenta la condizione ideale in cui le previsioni teoriche e i risultati sperimentali coincidono esattamente. In altre parole, qualsiasi punto situato sulla diagonale indica una perfetta corrispondenza tra i valori teorici e quelli sperimentali. La distanza dei punti da questa linea riflette la discrepanza tra i due set di risultati: punti posti al di sotto della diagonale indicano che i valori sperimentali sono inferiori rispetto alle previsioni teoriche, mentre punti al di sopra della linea evidenziano una sovrastima sperimentale rispetto ai valori teorici.

L'analisi del diagramma mostra una limitata dispersione dei punti rispetto alla retta $y = x$, per la serie HB a differenza di quelli calcolati secondo il modello teorico classico di Housner [3] per la serie RB. Tale dispersione evidenzia che il modello teorico proposto è stato in grado, nei casi specifici presentati in questo grafico, di rappresentare accuratamente il fenomeno del rocking osservato sperimentalmente.

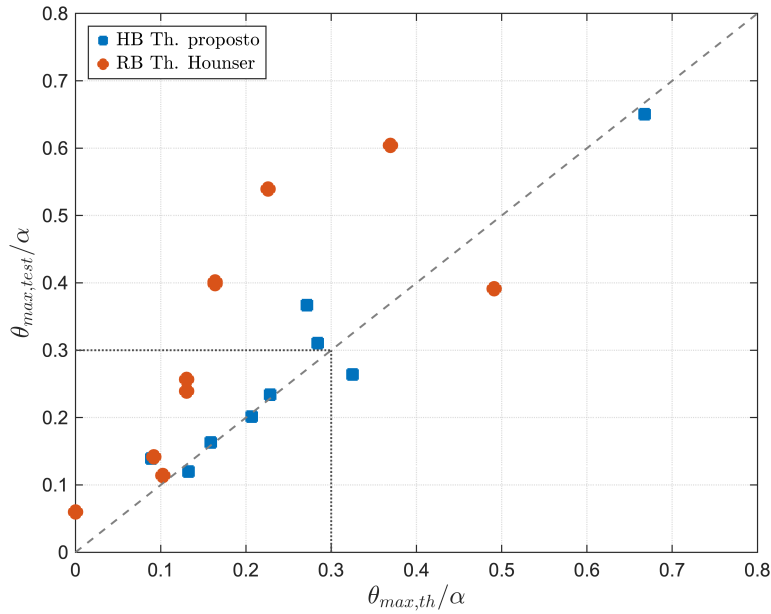


Figura 5.16: Diagramma a dispersione delle rotazioni massime θ_{max} di ogni test

6 | CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

6.1. Conclusioni

Nonostante la dinamica rocking delle strutture multiblocco in muratura sia stata oggetto di studi da molto tempo, essa continua ancora a suscitare l'interesse da parte della comunità scientifica. Le motivazioni sono riconducibili sia alla sempre più crescente attenzione allo studio della dinamica delle murature in vista di mirati interventi di tutela e salvaguardia del patrimonio architettonico e archeologico, sia soprattutto per colmare alcune lacune nei modelli proposti in Letteratura che non riescono a cogliere alcuni aspetti osservati sperimentalmente.

Le strutture multiblocco in muratura hanno un potenziale intrinseco, ossia presentano caratteristiche dinamiche uniche che possono essere sfruttate in maniera efficace per mitigare i rischi sismici. Se correttamente comprese e modellate, le proprietà dei sistemi rocking offrono soluzioni innovative per ridurre gli effetti devastanti dei terremoti sulle strutture antiche, che spesso presentano vulnerabilità specifiche legate alle loro tecniche costruttive e ai materiali utilizzati.

In particolare, la protezione delle strutture in muratura in aree sismicamente attive rappresenta una sfida cruciale per l'ingegneria civile e l'Architettura contemporanea. Le strutture in muratura, caratterizzate da una limitata resistenza a trazione e dalla tendenza a sviluppare fratture localizzate agli spigoli, sono particolarmente vulnerabili ai danni provocati dalle sollecitazioni sismiche. Le rotture agli spigoli, pur essendo spesso considerate danni superficiali, hanno un impatto significativo sul comportamento dinamico della struttura. Il comportamento oscillatorio dei blocchi danneggiati, influenzato da queste rotture, può essere profondamente alterato, aumentando il rischio di collasso durante ulteriori scosse sismiche.

In questo contesto, la ricerca, sviluppata nell'ambito delle attività di tesi svolte, ha mirato dapprima a studiare in modo approfondito l'influenza delle rotture che

avvengono agli spigoli dei blocchi sul comportamento dinamico complessivo e sulla stabilità. In particolare, il primo modello teorico proposto ha riguardato l'analisi della dinamica rocking di un blocco con spigoli raccordati al fine di simulare il danneggiamento degli stessi. Questo modello permette di descrivere in maniera più dettagliata la transizione tra le fasi di rotolamento e di oscillazione pura, superando i limiti dei modelli classici come quello di Housner (a spigoli vivi). Attraverso un approccio strategico che integra modellazione teorica, simulazione numerica avanzata e una campagna sperimentale su modelli in scala ridotta, è stato possibile avere una comprensione più accurata della dinamica rocking dei blocchi reali che subiscono danneggiamenti a causa di oscillazioni continue.

Uno dei contributi più significativi di questa ricerca risiede nello sviluppo di una nuova formulazione analitica del contatto applicata alla dinamica di oscillazione dei blocchi rigidi. L'impatto tra blocchi durante il loro moto oscillatorio è un fenomeno complesso che coinvolge forze impulsive di durata finita, la cui modellazione accurata è fondamentale per prevedere il comportamento dinamico di strutture soggette a sollecitazioni sismiche. Questo studio ha cercato di superare le limitazioni dei modelli classici, introducendo un approccio che combina la dinamica multicorpo con una modellazione dettagliata del contatto tra blocchi, tenendo conto delle proprietà meccaniche dei materiali del blocco impattante e della base di appoggio, del coefficiente di restituzione (CoR), e della dissipazione energetica durante le fasi di compressione e restituzione. Il secondo modello analitico sviluppato in questo studio affronta due questioni fondamentali. La prima riguarda la capacità di includere in maniera esplicita le proprietà meccaniche dei materiali nel fenomeno di impatto. Tradizionalmente, i modelli di impatto considerano i blocchi come corpi perfettamente rigidi, trascurando la natura deformabile dei materiali e l'influenza che questa ha sul contatto. Il modello qui proposto, invece, integra in modo efficace le proprietà del materiale, fornendo una descrizione più accurata della distribuzione delle forze lungo la base del blocco durante l'impatto.

L'integrazione di questa formulazione analitica in un ambiente di simulazione numerica avanzato sviluppato in MATLAB ha permesso di testare il modello in vari scenari sismici complessi. Le simulazioni numeriche hanno tenuto conto di diverse configurazioni geometriche e proprietà dei materiali, offrendo un quadro completo del comportamento dinamico dei blocchi soggetti a differenti oscillazioni. Il programma sviluppato è stato progettato per simulare accuratamente l'evoluzione temporale delle forze di contatto e il comportamento del blocco, durante la fase di impatto.

Le prove sperimentali condotte mediante un setup sperimentale sviluppato ad hoc comprensivo di attuatore dinamico e sistema di acquisizione delle immagini mediante tecnologia DIC, hanno fornito dati e quindi risultati essenziali per la calibrazione e la validazione dei modelli numerici, confermando l'importanza di considerare le imperfezioni geometriche e le proprietà meccaniche dei materiali nel processo di modellazione meccanica della dinamica rocking. L'uso di tecniche avanzate di misurazione, come il sistema *Digital Image Correlation* (DIC), ha garantito l'acquisizione accurata dei dati di spostamento, migliorando la precisione delle analisi e quindi ottenendo risultati sperimentali accurati necessari alla validazione del modello teorico proposto. Le prove sperimentali hanno inoltre messo in evidenza l'importanza del coefficiente di restituzione (CoR) nel definire il comportamento dinamico del blocco durante gli impatti, un parametro che è stato studiato con attenzione attraverso la suddivisione dell'impatto nelle fasi di compressione e di restituzione.

Pertanto, si ritiene che la combinazione dei modelli teorici proposti, delle simulazioni numeriche sviluppate e delle prove sperimentali condotte abbia permesso di colmare una significativa lacuna nella letteratura esistente sulla dinamica del rocking delle strutture multiblocco in muratura, fornendo nuove prospettive e strumenti per la protezione delle costruzioni architettoniche e archeologiche storiche. I risultati ottenuti da questa ricerca offrono un contributo importante sia dal punto di vista teorico che sperimentale, e rappresentano un passo in avanti nella comprensione del comportamento dinamico dei blocchi in muratura danneggiati durante le sollecitazioni sismiche.

6.2. Lavori futuri

Il lavoro svolto può essere la base di partenza per lo sviluppo di ulteriori studi sia teorici che sperimentali.

Una prima direzione da percorrere potrebbe riguardare l'estensione dei modelli analitici e numerici formulati, includendo una gamma più ampia di configurazioni geometriche e di materiali, con particolare attenzione agli edifici con morfologie complesse o formati da blocchi eterogenei.

Inoltre, sarà fondamentale esplorare più a fondo l'effetto di parametri come la variabilità delle condizioni di contatto e l'interazione tra più blocchi danneggiati. La modellazione dell'impatto può essere ulteriormente perfezionata per tener conto di

fenomeni tridimensionali, considerando che molti edifici storici presentano geometrie irregolari che influenzano la risposta dinamica in modo non trascurabile.

Un altro sviluppo chiave potrebbe essere l'integrazione di un modello di impatto distribuito per la dinamica dei blocchi rigidi oscillanti. Mentre approcci teorici precedenti spesso consideravano l'impatto come un fenomeno concentrato in un singolo punto, la distribuzione degli impulsi lungo tutta la base del blocco (ossia all'interfaccia blocco-piano di appoggio) riflette meglio la realtà del contatto durante le oscillazioni. Il modello proposto suddivide la base del blocco in più punti di impatto, permettendo una rappresentazione più precisa della distribuzione delle forze e delle interazioni dinamiche. Questo approccio potrebbe essere ulteriormente affinato aumentando il numero di punti di contatto, migliorando la risoluzione della simulazione.

Dal punto di vista sperimentale, un interessante sviluppo potrebbe riguardare l'analisi dinamica di strutture composte da più blocchi, non solo blocchi isolati. La presenza di più elementi interagenti introduce complessità aggiuntive, come scorrimenti, urti reciproci e contatti multipli, che complicano notevolmente la risposta sismica. Questi effetti possono alterare significativamente il comportamento dinamico rispetto a quello osservato nei singoli blocchi. Di conseguenza, sarebbe utile condurre prove su strutture di muratura composte da più blocchi, per verificare la risposta complessiva di tali sistemi in presenza di danni locali agli spigoli. Queste prove consentirebbero di simulare scenari più realistici in cui gli edifici storici non sono formati da singoli blocchi isolati, ma da aggregati di blocchi interagenti la cui risposta dinamica può differire notevolmente rispetto ai singoli elementi. In particolare, potrebbero emergere modalità di collasso che coinvolgono interazioni multiple tra blocchi, influenzate non solo dalla geometria individuale ma anche dai rapporti di contatto e dalla distribuzione delle forze attraverso l'intera struttura.

In futuro, sarà interessante valutare l'applicazione di questi modelli a strutture multiblocco e di diverse tipologie geometriche (si pensi anche all'applicazione al caso degli archi), così da poter estendere ulteriormente l'ambito di applicazione dei modelli sviluppati. In tal modo, si potrebbe ottenere una comprensione più esaustiva delle modalità di collasso e migliorare la capacità di previsione del comportamento di queste strutture in risposta a sollecitazioni sismiche, contribuendo alla protezione e alla conservazione del patrimonio architettonico e archeologico in aree sismicamente attive.

Bibliografia

- [1] I. Stefanou, I. Vardoulakis e A. Mavraganis. «Dynamic motion of a conical frustum over a rough horizontal plane». In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46.1 (2011), pp. 114–124. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2010.07.008>.
- [2] S. Burger et al. «Behavior of inverted pendulum cylindrical structures that rock and wobble during earthquakes». In: *Proceedings of the 16th World Conference on Earthquake Engineering (WCEE 2017)*. National Information Centre of Earthquake Engineering, Indian Institute of 2017, p. 594.
- [3] G. W. Housner. «The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes». In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 53.2 (1963), pp. 403–417. DOI: <https://doi.org/10.1785/BSSA0530020403>.
- [4] R. Mallet. *Great Neapolitan earthquake of 1857: the first principles of observational seismology as developed in the report to the Royal Society of London of the expedition made by command of the Society Into the interior of the Kingdom of Naples, to investigate the circumstances of the great earthquake of December 1857*. Vol. 2. Chapman e Hall, 1862.
- [5] J. Perry. «Notes on the rocking of a column». In: *Transactions of the Seismological Society of Japan* 3 (1881), pp. 103–106.
- [6] J. Milne. «Experiments in observational seismology». In: *Transactions of the seismological society of Japan* (1881), pp. 12–64.
- [7] J. Milne. «Seismic experiments». In: *Transactions of the Seismological Society of Japan* 8 (1885), pp. 1–82.
- [8] J. Milne. *Seismology*. K. Paul, Trench, Trübner & Company, Limited, 1898.
- [9] R. Ikegami e F. Kishinouye. «A study on the overturning of rectangular columns in the case of the nankai earthquake on december 21, 1946». In: *Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo* 25.1-4 (1949), pp. 49–55.
- [10] R. Ikegami e F. Kishinouye. «The Acceleration of Earthquake Motion Deduced from Overturning of the Gravestones in Case of the Imaichi Earthquake on Dec. 26, 1949». In: 28.1 (1950), pp. 121–128.
- [11] K. Muto, H. Umemura e Y. Sonobe. «Study of the overturning vibrations of slender structures». In: *Proc., 2nd World Conf. on Earthquake Engineering*. Vol. 2. Association for Science Documents Information Tokyo. 1960, pp. 1239–1261.
- [12] C. S. Yim, A. K. Chopra e J. Penzien. «Rocking response of rigid blocks to earthquakes». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 8.6 (1980), pp. 565–587. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.4290080606>.

- [13] Y. Ishiyama. «Motions of rigid bodies and criteria for overturning by earthquake excitations». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 10.5 (1982), pp. 635–650. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.4290100502>.
- [14] A. Sinopoli. «Kinematic approach in the impact problem of rigid bodies». In: (1989). DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3152395>.
- [15] T. Taniguchi. «Non-linear response analyses of rectangular rigid bodies subjected to horizontal and vertical ground motion». In: *Earthquake engineering & structural dynamics* 31.8 (2002), pp. 1481–1500. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.170>.
- [16] H. W. Shenton III. «Criteria for initiation of slide, rock, and slide-rock rigid-body modes». In: *Journal of Engineering Mechanics* 122.7 (1996), pp. 690–693. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1996\)122:7\(690\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1996)122:7(690)).
- [17] A. Pompei, A. Scalia e M.A. Sumbatyan. «Dynamics of rigid block due to horizontal ground motion». In: *Journal of Engineering Mechanics* 124.7 (1998), pp. 713–717. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1998\)124:7\(713\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:7(713)).
- [18] A. Scalia e M. A. Sumbatyan. «Slide rotation of rigid bodies subjected to a horizontal ground motion». In: *Earthquake engineering & structural dynamics* 25.10 (1996), pp. 1139–1149. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9845\(199610\)25:10<1139::AID-EQE606>3.0.CO;2-S](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9845(199610)25:10<1139::AID-EQE606>3.0.CO;2-S).
- [19] J. Zhang e N. Makris. «Rocking response of free-standing blocks under cycloidal pulses». In: *Journal of engineering mechanics* 127.5 (2001), pp. 473–483. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2001\)127:5\(473\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2001)127:5(473)).
- [20] M.Y. Jeong, K. Suzuki e S. C.S. Yim. «Chaotic rocking behavior of freestanding objects with sliding motion». In: *Journal of sound and vibration* 262.5 (2003), pp. 1091–1112. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01087-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01087-8).
- [21] M. Aslam, W. G. Godden e D. T. Scalise. «Earthquake rocking response of rigid bodies». In: *Journal of the Structural Division* 106.2 (1980), pp. 377–392. DOI: <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0005363>.
- [22] P. D. Spanos e A.-S. Koh. «Rocking of rigid blocks due to harmonic shaking». In: *Journal of Engineering Mechanics* 110.11 (1984), pp. 1627–1642. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1984\)110:11\(1627\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1984)110:11(1627)).
- [23] S. J. Hogan. «On the dynamics of rigid-block motion under harmonic forcing». In: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 425.1869 (1989), pp. 441–476. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1989.0114>.
- [24] W. K. Tso e C. M. Wong. «Steady state rocking response of rigid blocks part 1: Analysis». In: *Earthquake engineering & structural dynamics* 18.1 (1989), pp. 89–106. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.4290180109>.
- [25] C. M. Wong e W. K. Tso. «Steady state rocking response of rigid blocks part 2: Experiment». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 18.1 (1989), pp. 107–120. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.4290180110>.

- [26] H. W. Shenton III e N. P. Jones. «Base excitation of rigid bodies. I: Formulation». In: *Journal of Engineering Mechanics* 117.10 (1991), pp. 2286–2306. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1991\)117:10\(2286\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1991)117:10(2286)).
- [27] H. Lin e S. C. S. Yim. «Nonlinear rocking motions. I: chaos under noisy periodic excitations». In: *Journal of engineering mechanics* 122.8 (1996), pp. 719–727. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1996\)122:8\(719\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1996)122:8(719)).
- [28] A. Anooshehpour et al. «Estimates of the ground accelerations at Point Reyes Station during the 1906 San Francisco earthquake». In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 89.4 (1999), pp. 845–853. DOI: <https://doi.org/10.1785/BSSA0890040845>.
- [29] B. Shi et al. «Rocking and overturning of precariously balanced rocks by earthquakes». In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 86.5 (1996), pp. 1364–1371. DOI: <https://doi.org/10.1785/BSSA0860051364>.
- [30] N. Makris e Y. S. Roussos. «Rocking response of rigid blocks under near-source ground motions». In: *Geotechnique* 50.3 (2000), pp. 243–262. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2000.50.3.243>.
- [31] M. J. DeJong. «Amplification of rocking due to horizontal ground motion». In: *Earthquake Spectra* 28.4 (2012), pp. 1405–1421. DOI: <https://doi.org/10.1193/1.4000085>.
- [32] E. G. Dimitrakopoulos e M. J. DeJong. «Revisiting the rocking block: closed-form solutions and similarity laws». In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 468.2144 (2012), pp. 2294–2318. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0026>.
- [33] A. N. Kounadis. «Parametric study in rocking instability of a rigid block under harmonic ground pulse: A unified approach». In: *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 45 (2013), pp. 125–143. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2012.10.002>.
- [34] M. J. DeJong e E. G. Dimitrakopoulos. «Dynamically equivalent rocking structures». In: *Earthquake engineering & structural dynamics* 43.10 (2014), pp. 1543–1563. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.2410>.
- [35] S. Lagomarsino. «Seismic assessment of rocking masonry structures». In: *Bulletin of earthquake engineering* 13 (2015), pp. 97–128. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10518-014-9609-x>.
- [36] E. G. Dimitrakopoulos e E. Dat W. Fung. «Closed-form rocking overturning conditions for a family of pulse ground motions». In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 472.2196 (2016), p. 20160662. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0662>.
- [37] C. Casapulla, A. Maione et al. «Rocking resonance conditions of large and slender rigid blocks under the intense phase of an earthquake». In: *Proceedings of the 6th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPdyn 2017), Rhodes Island, Greece. 2017*, pp. 15–17.
- [38] F. Prieto, P. B. Lourenço e C.S. Oliveira. «Impulsive Dirac-delta forces in the rocking motion». In: *Earthquake engineering & structural dynamics* 33.7 (2004), pp. 839–857. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.381>.

- [39] F. Peña et al. «On the dynamics of rocking motion of single rigid-block structures». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 36.15 (2007), pp. 2383–2399. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.739>.
- [40] A. I. Giouvanidis e E. G. Dimitrakopoulos. «Nonsmooth dynamic analysis of sticking impacts in rocking structures». In: *Bulletin of Earthquake Engineering* 15 (2017), pp. 2273–2304. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10518-016-0068-4>.
- [41] A. Di Egidio e A. Contento. «Base isolation of slide-rocking non-symmetric rigid blocks under impulsive and seismic excitations». In: *Engineering Structures* 31.11 (2009), pp. 2723–2734. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.06.021>.
- [42] N. eh, G. Jeleni e N. Biani. «Analysis of restitution in rocking of single rigid blocks». In: *Acta mechanica* 229 (2018), pp. 4623–4642. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2246-8>.
- [43] D. Kalliontzis, S. Sritharan e A. Schultz. «Improved coefficient of restitution estimation for free rocking members». In: *Journal of Structural Engineering* 142.12 (2016), p. 06016002. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0001598](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001598).
- [44] M.J.N. Priestley, R.J. Evison e A.J. Carr. «Seismic response of structures free to rock on their foundations». In: *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering* 11.3 (1978), pp. 141–150. DOI: <https://doi.org/10.5459/bnzsee.11.3.141-150>.
- [45] D. Konstantinidis e N. Makris. «Experimental and analytical studies on the response of freestanding laboratory equipment to earthquake shaking». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 38.6 (2009), pp. 827–848. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.871>.
- [46] K. Klaboe, S. Pujol e L. Laughery. «Seismic response of rocking blocks». In: *Earthquake Spectra* 34.3 (2018), pp. 1051–1063. DOI: <https://doi.org/10.1193/060517EQS107DP>.
- [47] M. A. ElGawady et al. «Effects of interface material on the performance of free rocking blocks». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 40.4 (2011), pp. 375–392. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.1025>.
- [48] E. Avgenakis e I. N. Psycharis. «An integrated macroelement formulation for the dynamic response of inelastic deformable rocking bodies». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 49.11 (2020), pp. 1072–1094. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.3279>.
- [49] M.N. Chatzis, M. G. Espinosa e A.W. Smyth. «Examining the energy loss in the inverted pendulum model for rocking bodies». In: *Journal of Engineering Mechanics* 143.5 (2017), p. 04017013. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001205](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001205).
- [50] R. Giannini e R. Masiani. «Risposta in frequenza del blocco rigido: Stabilità delle soluzioni». In: *Proc., 10th Italian National Conf. of Theoretical and Applied Mechanics. Pisa, Italy: European Turfgrass Society*. 1990.
- [51] N. Makris e D. Konstantinidis. «The rocking spectrum and the limitations of practical design methodologies». In: *Earthquake engineering & structural dynamics* 32.2 (2003), pp. 265–289. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.223>.
- [52] S. A. Anagnostopoulos. «Equivalent viscous damping for modeling inelastic impacts in earthquake pounding problems». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 33.8 (2004), pp. 897–902. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.377>.

- [53] C.-T. Cheng. «Energy dissipation in rocking bridge piers under free vibration tests». In: *Earthquake engineering & structural dynamics* 36.4 (2007), pp. 503–518. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.640>.
- [54] Stephen C. Hunter. «Energy absorbed by elastic waves during impact». In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 5.3 (1957), pp. 162–171. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(57\)90002-9](https://doi.org/10.1016/0022-5096(57)90002-9).
- [55] J. Reed. «Energy losses due to elastic wave propagation during an elastic impact». In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 18.12 (1985), p. 2329. DOI: [10.1088/0022-3727/18/12/004](https://doi.org/10.1088/0022-3727/18/12/004).
- [56] J.P.A. Tillett. «A study of the impact of spheres on plates». In: *Proceedings of the Physical Society. Section B* 67.9 (1954), p. 677. DOI: [10.1088/0370-1301/67/9/304](https://doi.org/10.1088/0370-1301/67/9/304).
- [57] A. Anooshehpour e J. N. B. «Verification of precarious rock methodology using shake table tests of rock models». In: *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 22.9-12 (2002), pp. 917–922. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0267-7261\(02\)00115-X](https://doi.org/10.1016/S0267-7261(02)00115-X).
- [58] J. A. Bachmann, M. F. Vassiliou e B. Stojadinovic. «Rolling and rocking of rigid uplifting structures». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 48.14 (2019), pp. 1556–1574. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.3213>.
- [59] Chi-Pu Lin, R. Wiebe e J. W. Berman. «Analytical and numerical study of curved-base rocking walls». In: *Engineering structures* 197 (2019), p. 109397. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109397>.
- [60] N. Makris. «A half-century of rocking isolation». In: *Earthquakes and Structures* 7.6 (2014), pp. 1187–1221. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/eas.2014.7.6.1187>.
- [61] E. G. Dimitrakopoulos e T. S. Paraskeva. «Dimensionless fragility curves for rocking response to near-fault excitations». In: *Earthquake engineering & structural dynamics* 44.12 (2015), pp. 2015–2033. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.2571>.
- [62] P. Flores et al. *Kinematics and dynamics of multibody systems with imperfect joints: models and case studies*. Vol. 34. Springer Science & Business Media, 2008.
- [63] P. E. Nikraves. «Newtonian-based methodologies in multi-body dynamics». In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics* 222.4 (2008), pp. 277–288. DOI: <https://doi.org/10.1243/14644193JMBD152>.
- [64] E. Dimitrakopoulos, A. J. Kappos e N. Makris. «Dimensional analysis of yielding and pounding structures for records without distinct pulses». In: *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 29.7 (2009), pp. 1170–1180. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2009.02.006>.
- [65] E. Dimitrakopoulos, N. Makris e A. J. Kappos. «Dimensional analysis of the earthquake-induced pounding between adjacent structures». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 38.7 (2009), pp. 867–886. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.872>.
- [66] E. G. Dimitrakopoulos. «Analysis of a frictional oblique impact observed in skew bridges». In: *Nonlinear Dynamics* 60 (2010), pp. 575–595. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-009-9616-7>.

- [67] E. G. Dimitrakopoulos. «Nonsmooth analysis of the impact between successive skew bridge-segments». In: *Nonlinear Dynamics* 74 (2013), pp. 911–928. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-013-1012-7>.
- [68] G. L. Cole, R. P. Dhakal e F. M. Turner. «Building pounding damage observed in the 2011 Christchurch earthquake». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 41.5 (2012), pp. 893–913. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.1164>.
- [69] J. R. Williams e R. O'Connor. «Discrete element simulation and the contact problem». In: *Archives of computational methods in engineering* 6.4 (1999), pp. 279–304. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02818917>.
- [70] D. Dopico et al. «Dealing with multiple contacts in a human-in-the-loop application». In: *Multibody System Dynamics* 25 (2011), pp. 167–183. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11044-010-9230-y>.
- [71] M. Machado et al. «Compliant contact force models in multibody dynamics: Evolution of the Hertz contact theory». In: *Mechanism and machine theory* 53 (2012), pp. 99–121. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2012.02.010>.
- [72] K. H. Hunt e F.R.E. Crossley. «Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact». In: (1975). DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3423596>.
- [73] H. Hertz. «Ueber die Berührung fester elastischer Körper.» In: (1882). DOI: <https://doi.org/10.1515/crll.1882.92.156>.
- [74] W. Goldsmith. *Impact*. Courier Corporation, 2001.
- [75] W. J. Stronge. *Impact mechanics*. Cambridge university press, 2018.
- [76] X. Zhang e L. Vu-Quoc. «Modeling the dependence of the coefficient of restitution on the impact velocity in elasto-plastic collisions». In: *International journal of impact engineering* 27.3 (2002), pp. 317–341. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0734-743X\(01\)00052-5](https://doi.org/10.1016/S0734-743X(01)00052-5).
- [77] C. Glocker. «On frictionless impact models in rigid-body systems». In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 359.1789 (2001), pp. 2385–2404. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.2001.0857>.
- [78] M. Machado et al. «Development of a planar multibody model of the human knee joint». In: *Nonlinear Dynamics* 60 (2010), pp. 459–478. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-009-9608-7>.
- [79] H. M. Lankarani e P.E. Nikravesh. «A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems». In: *International design engineering technical conferences and computers and information in engineering conference*. Vol. 3691. American Society of Mechanical Engineers. 1989, pp. 45–51. DOI: <https://doi.org/10.1115/DETC1989-0104>.
- [80] G. Gilardi e I. Sharf. «Literature survey of contact dynamics modelling». In: *Mechanism and machine theory* 37.10 (2002), pp. 1213–1239. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(02\)00045-9](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(02)00045-9).
- [81] P. E. Nikravesh. *Computer-aided analysis of mechanical systems*. Prentice-Hall, Inc., 1988.

- [82] P. Flores. *Concepts and formulations for spatial multibody dynamics*. Springer, 2015.
- [83] D. S. Lopes et al. «A mathematical framework for rigid contact detection between quadric and superquadric surfaces». In: *Multibody System Dynamics* 24 (2010), pp. 255–280. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11044-010-9220-0>.
- [84] M. Machado et al. «Influence of the contact model on the dynamic response of the human knee joint». In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics* 225.4 (2011), pp. 344–358. DOI: <https://doi.org/10.1177/1464419311413988>.
- [85] P. Flores e J. Ambrósio. «Revolute joints with clearance in multibody systems». In: *Computers & structures* 82.17-19 (2004), pp. 1359–1369. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.03.03>.
- [86] Y. Hurmuzlu. «An energy-based coefficient of restitution for planar impacts of slender bars with massive external surfaces». In: (1998). DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2791939>.
- [87] R. M. Brach. «Formulation of rigid body impact problems using generalized coefficients». In: *International journal of engineering science* 36.1 (1998), pp. 61–71. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(97\)00057-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(97)00057-8).
- [88] C. T. Lim e W. J. Stronge. «Oblique elastic-plastic impact between rough cylinders in plane strain». In: *International Journal of Engineering Science* 37.1 (1999), pp. 97–122. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(98\)00026-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(98)00026-3).
- [89] I. Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Vol. 1. G. Brookman, 1833.
- [90] E. J. Routh. *The Advanced Part of A Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies: Being Part II. of a Treatise on the Whole Subject*. Macmillan, 1905.
- [91] W. J. Stronge. «Rigid body collisions with friction». In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* 431.1881 (1990), pp. 169–181. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1990.0125>.
- [92] R. L. Jackson, I. Green e D. B. Marghitu. «Predicting the coefficient of restitution of impacting elastic-perfectly plastic spheres». In: *Nonlinear Dynamics* 60 (2010), pp. 217–229. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-009-9591-z>.
- [93] M. R. Brake. «An analytical elastic-perfectly plastic contact model». In: *International Journal of Solids and Structures* 49.22 (2012), pp. 3129–3141. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.06.013>.
- [94] Y. Wang e M. T. Mason. «Two-dimensional rigid-body collisions with friction». In: (1992). DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2893771>.
- [95] E. T. Whittaker. *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*. CUP Archive, 1964.
- [96] S. Djerassi. «Stronges hypothesis-based solution to the planar collision-with-friction problem». In: *Multibody System Dynamics* 24 (2010), pp. 493–515. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11044-010-9200-4>.
- [97] S. Djerassi. «Three-dimensional, one-point collision with friction». In: *Multibody System Dynamics* 27 (2012), pp. 173–195. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11044-011-9287-2>.

- [98] I. Sharf e Y. Zhang. «A contact force solution for non-colliding contact dynamics simulation». In: *Multibody system dynamics* 16 (2006), pp. 263–290. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11044-006-9026-2>.
- [99] K. L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge university press, 1987.
- [100] Peter Wriggers e Tod A Laursen. *Computational contact mechanics*. Vol. 2. Springer, 2006.
- [101] C. M. Pereira, A. L. Ramalho e J. A. Ambrósio. «A critical overview of internal and external cylinder contact force models». In: *Nonlinear Dynamics* 63 (2011), pp. 681–697. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-010-9830-3>.
- [102] H. M. Lankarani e P. E. Nikravesh. «Continuous contact force models for impact analysis in multibody systems». In: *Nonlinear Dynamics* 5 (1994), pp. 193–207. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00045676>.
- [103] T. M. Pham, Y. Hao e H. Hao. «Sensitivity of impact behaviour of RC beams to contact stiffness». In: *International Journal of Impact Engineering* 112 (2018), pp. 155–164. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2017.09.015>.
- [104] D.M. Mulvihill et al. «A comparison of contact stiffness measurements obtained by the digital image correlation and ultrasound techniques». In: *Experimental Mechanics* 53 (2013), pp. 1245–1263. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11340-013-9718-5>.
- [105] G. Vlachakis et al. «Experimental characterisation of dry-joint masonry structures: Interface stiffness and interface damping». In: *Construction and Building Materials* 392 (2023), p. 130880. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.130880>.
- [106] D. W. Marhefka e D. E. Orin. «A compliant contact model with nonlinear damping for simulation of robotic systems». In: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans* 29.6 (1999), pp. 566–572. DOI: 10.1109/3468.798060.
- [107] A. E. H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge university press, 2013.
- [108] S. Shivaswamy. *Modeling contact forces and energy dissipation during impact in mechanical systems*. Wichita State University, 1997.
- [109] P. Flores e J. Ambrósio. «On the contact detection for contact-impact analysis in multibody systems». In: *Multibody System Dynamics* 24 (2010), pp. 103–122. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11044-010-9209-8>.
- [110] P. Flores e H. M. Lankarani. *Contact force models for multibody dynamics*. Vol. 226. Springer, 2016.
- [111] The MathWorks, Inc. *MATLAB*. Version 24.1.0.2628055 (R2024a). The MathWorks, Inc. Natick, Massachusetts, 2024.
- [112] Charlie Mathey et al. «Behavior of rigid blocks with geometrical defects under seismic motion: an experimental and numerical study». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 45.15 (2016), pp. 2455–2474. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.2773>.
- [113] E. Buckingham. «On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations». In: *Physical review* 4.4 (1914), p. 345. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.4.345>.

- [114] P.R. Lipscombe e S. Pellegrino. «Free rocking of prismatic blocks». In: *Journal of engineering mechanics* 119.7 (1993), pp. 1387–1410. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1993\)119:7\(1387\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1993)119:7(1387)).
- [115] F. Peña, P. B. Lourenço e A. Campos. «Experimental dynamic behavior of free-standing multi-block structures under seismic loadings». In: *Journal of Earthquake Engineering* 12.6 (2008), pp. 953–979. DOI: <https://doi.org/10.1080/13632460801890513>.
- [116] P.D. Spanos et al. «Rocking of rigid block on nonlinear flexible foundation». In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 94 (2017), pp. 362–374. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.06.005>.

A | Appendice

Supplementi teorici

A.1. Equazioni di Eulero-Lagrange

Le equazioni di Lagrange sono equazioni pure di moto, nel senso che non contengono le reazioni vincolari e si applicano a sistemi olonomi descritti da un numero finito di coordinate lagrangiane $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Questa loro caratteristica consente di operare una separazione nei problemi di dinamica, nel senso che con le equazioni di Lagrange si risolve direttamente il problema di moto e poi si possono determinare le reazioni vincolari utilizzando le equazioni di moto newtoniane. Le Equazioni sono:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{A.1})$$

dove q_i è una delle n coordinate indipendenti, L è la lagrangiana e D l'energia dissipata del sistema oscillante. La lagrangiana stessa è definita come la differenza tra l'energia cinetica T e l'energia potenziale V , ovvero:

$$L = T - V \quad (\text{A.2})$$

A.2. Equazioni del moto

FASE I: Rotolamento

Secondo la convenzione dei segni, lo spostamento orizzontale totale del centro di massa G del blocco, dovuto allo spostamento del terreno u_g è:

$$u_G = u_g - x_G, \quad (\text{A.3})$$

con

$$x_G = R \sin \tilde{\alpha} - R \sin(\tilde{\alpha} - \theta) + r \cdot (\theta - \sin \theta), \quad (\text{A.4})$$

mentre lo spostamento verticale di G è

$$y_G = R \cos(\tilde{\alpha} - \theta) + r \cdot (1 - \cos \theta), \quad (\text{A.5})$$

In virtù di tali relazioni, otteniamo:

$$\dot{u}_G = \dot{u}_g + R\dot{\theta} \cdot \cos(\tilde{\alpha} - \theta) - r\dot{\theta}(1 - \cos \theta) \quad (\text{A.6a})$$

$$\dot{y}_G = -R\dot{\theta} \cdot \sin(\tilde{\alpha} - \theta) + r\dot{\theta} \sin \theta, \quad (\text{A.6b})$$

L'energia cinetica totale dovuta al moto combinato del blocco (rotazione e traslazione) è:

$$T = \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{u}_G^2 + \dot{y}_G^2), \quad (\text{A.7})$$

dove $J_G = mR^2/3$ è il momento d'inerzia polare del blocco rispetto al suo centro di gravità G . Usando le relazioni (A.6) e (A.7) segue che:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{u}_g^2 + m r^2 \dot{\theta}^2 (1 - \cos \theta) - m \dot{u}_g R \dot{\theta} \cos(\tilde{\alpha} - \theta) \\ & - m \dot{u}_g r \dot{\theta} (1 - \cos \theta) + m r R \dot{\theta}^2 \cos(\tilde{\alpha} - \theta) - m r R \dot{\theta}^2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Dall'Equazione (A.8) segue che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = & J_O \dot{\theta} + 2 m r^2 \dot{\theta} (1 - \cos \theta) - m \dot{u}_g R \cos(\tilde{\alpha} - \theta) - m \dot{u}_g r (1 - \cos \theta) \\ & + 2 m r R \dot{\theta} \cos(\tilde{\alpha} - \theta) - 2 m r R \dot{\theta} \cos \alpha \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = & J_O \ddot{\theta} + 2 m r^2 \ddot{\theta} (1 - \cos \theta) + 2 m r^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta - m \ddot{u}_g R \cos(\tilde{\alpha} - \theta) \\ & + m \ddot{u}_g R \dot{\theta} \sin(\tilde{\alpha} - \theta) - m \ddot{u}_g r (1 - \cos \theta) - m \dot{u}_g r \dot{\theta} \sin \theta + 2 m r R \ddot{\theta} \cos(\tilde{\alpha} - \theta) \\ & - 2 m r R \dot{\theta}^2 \sin(\tilde{\alpha} - \theta) - 2 m r R \ddot{\theta} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Inoltre, dall'Eqazione (A.8) otteniamo:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = mr^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta + m \dot{u}_g R \dot{\theta} \sin(\tilde{\alpha} - \theta) - m \dot{u}_g r \dot{\theta} \sin \theta - mr R \dot{\theta}^2 \sin(\tilde{\alpha} - \theta) \quad (\text{A.11})$$

Considerando che:

$$V = mg [R \cos(\tilde{\alpha} - \theta) + r(1 - \cos \theta)], \quad (\text{A.12})$$

allora

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -mgR \sin(\tilde{\alpha} - \theta) - mgr \sin \theta \quad (\text{A.13})$$

Usando le relazioni (A.10), (A.11) e (A.13), l'Equazione (A.1), riorganizzando e rimaneggiando diventa:

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta} \left[\frac{4}{3} + 4\rho \cos \alpha (\cos(\tilde{\alpha} - \theta) - \cos \alpha) + 8\rho^2 \cos^2 \alpha (1 - \cos \theta) \right] \\ & + \dot{\theta}^2 \left[-2\rho \cos \alpha \sin(\tilde{\alpha} - \theta) + 4\rho^2 \cos^2 \alpha \sin \theta \right] \\ & - \frac{\ddot{u}_g}{R} [\cos(\tilde{\alpha} - \theta) + 2\rho \cos \alpha (1 - \cos \theta)] \\ & - \frac{g}{R} [\sin(\tilde{\alpha} - \theta) + 2\rho \cos \alpha \sin \theta] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

FASE II: Rocking

Lo spostamento orizzontale totale del centro di massa G del blocco, dovuto allo spostamento del terreno u_g ,

$$u_G = u_g - x_G, \quad (\text{A.15})$$

con

$$x_G = R \sin \tilde{\alpha} - R \sin(\tilde{\alpha} - \theta) + r [\tilde{\psi} - \sin(\tilde{\psi} - \theta) - \sin \theta], \quad (\text{A.16})$$

mentre lo spostamento verticale di G è:

$$y_G = R \cos(\tilde{\alpha} - \theta) + r [\cos(\tilde{\psi} - \theta) - \cos \theta] \quad (\text{A.17})$$

in virtù di tali relazioni, otteniamo:

$$\dot{u}_G = \dot{u}_g + R\dot{\theta} \cos(\tilde{\alpha} - \theta) - r\dot{\theta} [-\cos(\tilde{\psi} - \theta) - \cos \theta] \quad (\text{A.18a})$$

$$\dot{y}_G = -R\dot{\theta} \sin(\tilde{\alpha} - \theta) + r\dot{\theta} [-\sin(\tilde{\psi} - \theta) + \sin \theta] \quad (\text{A.18b})$$

L'energia cinetica totale dovuta al moto combinato del blocco (rotazione e traslazione) è

$$T = \frac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{u}_G^2 + \dot{y}_G^2), \quad (\text{A.19})$$

Usando le relazioni (A.18), l'Equazione (A.19) si scrive come segue:

$$T = \frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}_g^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 \cos \psi + m\dot{u}_g R\dot{\theta} \cos(\tilde{\alpha} - \theta) + \\ m\dot{u}_g r\dot{\theta} \cos(\tilde{\psi} - \theta) + m\dot{u}_g r\dot{\theta} \cos \theta + mrR\dot{\theta}^2 \cos(\alpha - \psi) + mrR\dot{\theta}^2 \cos \alpha. \quad (\text{A.20})$$

Dall'Equazione (A.20) segue che:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_O\dot{\theta} + 2mr^2\dot{\theta} + 2mr^2\dot{\theta} \cos \psi + m\dot{u}_g R \cos(\tilde{\alpha} - \theta) + \\ m\dot{u}_g r \cos(\tilde{\psi} - \theta) + m\dot{u}_g r \cos \theta + 2mrR\dot{\theta} \cos(\alpha - \psi) + 2mrR\dot{\theta} \cos \alpha \quad (\text{A.21})$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = J_O\ddot{\theta} + 2mr^2\ddot{\theta} + 2mr^2\ddot{\theta} \cos \psi + m\ddot{u}_g R \cos(\tilde{\alpha} - \theta) - \\ m\dot{u}_g R\dot{\theta} \sin(\tilde{\alpha} - \theta) + m\ddot{u}_g r \cos(\tilde{\psi} - \theta) - m\dot{u}_g r\dot{\theta} \sin(\tilde{\psi} - \theta) + m\ddot{u}_g r \cos \theta - \\ m\dot{u}_g r\dot{\theta} \sin \theta + 2mrR\ddot{\theta} \cos(\alpha - \psi) + 2mrR\ddot{\theta} \cos \alpha \quad (\text{A.22})$$

Inoltre dall'Equazione (A.20) otteniamo:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -m\dot{u}_g R\dot{\theta} \sin(\tilde{\alpha} - \theta) - m\dot{u}_g r\dot{\theta} \sin(\tilde{\psi} - \theta) - m\dot{u}_g r\dot{\theta} \sin \theta \quad (\text{A.23})$$

Considerando che:

$$V = mg \left[R \cos(\tilde{\alpha} - \theta) + r \left(\cos(\tilde{\psi} - \theta) - \cos \theta \right) \right] \quad (\text{A.24})$$

allora

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -mgR \sin(\tilde{\alpha} - \theta) + mgr \left(-\sin(\tilde{\psi} - \theta) + \sin \theta \right) \quad (\text{A.25})$$

Usando le relazioni (A.22), (A.11) e (A.25), l'Equazione (A.1) diventa nella seconda fase, dopo rimaneggiamenti e riorganizzando:

$$\begin{aligned}
 & \ddot{\theta} \left[\frac{4}{3} + 8\rho^2 \cos^2 \alpha (1 - \cos \psi) + 4\rho \cos \alpha (\cos(\alpha - \psi) + \cos \alpha) \right] \\
 & + \frac{\ddot{u}_g}{R} \left[\cos(\tilde{\alpha} - \theta) + 2\rho \cos \alpha (\cos(\tilde{\psi} - \theta) - \cos \theta) \right] \\
 & - \frac{g}{R} \left[\sin(\tilde{\alpha} - \theta) + 2\rho \cos \alpha (\sin(\tilde{\psi} - \theta) + \sin \theta) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

B | Appendice

Formulazione del contatto

B.1. Modello forza di contatto continua

B.1.1. Dettagli di risoluzione dell'equazione integrale per ΔT

Sostituendo l'espressione (4.34) nell'Equazione (4.35) e sviluppando l'integrale si ottiene:

$$\Delta T = 2\chi \int_0^{\delta_{max}} \delta \sqrt{\left(\dot{\delta}^{(-)}\right)^2 - \frac{K}{m}\delta^2} d\delta \quad (\text{B.1})$$

Operando una sostituzione $\delta = u\delta_{max}$, dove u varia da 0 a 1 e $\delta_{max} = \sqrt{m/K}\dot{\delta}^{(-)}$. Quindi $d\delta = \delta_{max} du$.

Sostituendo nell'integrale (B.1):

$$\Delta T = 2\chi \int_0^1 (u\delta_{max}) \sqrt{\left[\dot{\delta}^{(-)}\right]^2 - \frac{K}{m}(u\delta_{max})^2} \delta_{max} du \quad (\text{B.2})$$

e semplificando:

$$\Delta T = 2\chi \delta_{max}^2 \int_0^1 u \sqrt{\left[\dot{\delta}^{(-)}\right]^2 - \frac{K}{m}(u\delta_{max})^2} du \quad (\text{B.3})$$

Sapendo che $\delta_{max} = \sqrt{\frac{m}{K}}\dot{\delta}^{(-)}$, possiamo scrivere:

$$\Delta T = 2\chi\delta_{\max}^2 \int_0^1 u \sqrt{[\dot{\delta}^{(-)}]^2 - \frac{K}{m} u^2 \left(\frac{m}{K} [\dot{\delta}^{(-)}] \right)^2} du \quad (\text{B.4})$$

$$\Delta T = 2\chi\delta_{\max}^2 \int_0^1 u \sqrt{(\dot{\delta}^{(-)})^2 (1 - u^2)} du \quad (\text{B.5})$$

$$= 2\chi\delta_{\max}^2 [\dot{\delta}^{(-)}] \int_0^1 u \sqrt{1 - u^2} du \quad (\text{B.6})$$

Ora risolviamo l'integrale:

$$\int_0^1 u \sqrt{1 - u^2} du \quad (\text{B.7})$$

Utilizziamo la sostituzione $u = \sin \theta$, quindi $du = \cos \theta d\theta$, e quando $u = 0$, $\theta = 0$, e quando $u = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^1 u \sqrt{1 - u^2} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \quad (\text{B.8})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \quad (\text{B.9})$$

Usando l'identità trigonometrica $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$, otteniamo:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta \quad (\text{B.10})$$

Dividiamo l'integrale:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \quad (\text{B.11})$$

Il soluzione del primo integrale è banale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = 1 \quad (\text{B.12})$$

Il secondo integrale può essere risolto usando l'identità $\sin^3 \theta = \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \quad (\text{B.13})$$

Già sappiamo che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = 1$, quindi l'integrale diventa:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \quad (\text{B.14})$$

Ricordando che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{2}{3}$ (da tabelle di integrali standard), allora:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad (\text{B.15})$$

Quindi, l'integrale (B.7) è pari a:

$$\int_0^1 u \sqrt{1 - u^2} du = \frac{2}{3} \quad (\text{B.16})$$

Ora, sostituendo questo risultato nell'integrale (B.6) per ΔT :

$$\Delta T = 2\chi \delta_{\max}^2 [\dot{\delta}^{(-)}] \cdot \frac{2}{3} \quad (\text{B.17})$$

$$= \frac{4}{3} \chi \delta_{\max}^2 [\dot{\delta}^{(-)}] \quad (\text{B.18})$$

Infine, sostituendo $\delta_{\max} = \sqrt{\frac{m}{K}} [\dot{\delta}^{(-)}]$ nell'Equazione (B.18):

$$\Delta T = \frac{4}{3} \chi \left(\sqrt{\frac{m}{K}} [\dot{\delta}^{(-)}] \right)^2 [\dot{\delta}^{(-)}] \quad (\text{B.19})$$

$$= \frac{4}{3} \chi \left(\frac{m}{K} [\dot{\delta}^{(-)}]^2 \right) [\dot{\delta}^{(-)}] \quad (\text{B.20})$$

$$= \frac{4}{3} \chi \frac{m}{K} [\dot{\delta}^{(-)}]^3 \quad (\text{B.21})$$

Quindi, l'espressione finale per ΔT è:

$$\Delta T = \frac{4}{3} \chi \frac{m}{K} [\dot{\delta}^{(-)}]^3 \quad (\text{B.22})$$