

SIMULAZIONE NUMERICA LATTICE BOLTZMANN BIDIMENSIONALE DI UN GETTO GALLEGGIANTE IMMESSO IN UNA CORRENTE

Michele La Rocca¹, Andrea Montessori¹, Pietro Prestininzi¹, Giancarlo Chiaia², Daniela Malcangio², Michele Mossa²,

(1) Dipartimento di Ingegneria, Università degli Studi Roma Tre.; (2) Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale, del Territorio, Edile e di Chimica, Politecnico di Bari

ASPETTI CHIAVE

- Viene presentata la simulazione numerica bidimensionale di un getto galleggiante immerso in una corrente trasversale, basata sul metodo Lattice Boltzmann.
- Viene illustrato sinteticamente il modello Lattice Boltzmann equivalente alla equazione di Navier-Stokes con approssimazione di Boussinesque per l'interazione tra il getto e il fluido ambiente.
- I risultati ottenuti mostrano un accordo dal punto di vista qualitativo, finché gli effetti tridimensionali non assumono rilevanza.

1 INTRODUZIONE

La popolarità e la diffusione del Metodo del Lattice Boltzmann (LBM) crescono con continuità sin dal momento della sua introduzione nell'ambito della Fluidodinamica Computazionale. Rassegne esaurienti dello stato dell'arte e delle molteplici applicazioni del LBM si possono trovare in *Succi (2001)* e in *Aidun & Clausen (2010)*. La ragione della rapida diffusione del LBM risiede nell'intrinseca semplicità ed estrema versatilità dell'algoritmo. Quest'ultimo è infatti lineare e locale e mantiene la medesima struttura al variare del tipo di flusso considerato. In estrema sintesi il LBM descrive l'evoluzione del flusso in termini di un insieme discreto di Funzioni Densità di Probabilità (PDF), ciascuna delle quali fornisce la probabilità che una particella fluida si trovi, ad un dato istante, in una data posizione con una data velocità. L'evoluzione temporale delle PDF è governata dall'equazione discreta di Boltzmann. Le quantità macroscopiche (densità e velocità) vengono ottenute come momenti statistici di ordine zero e del primo ordine delle PDF. Il LBM è equivalente all'equazione di Navier-Stokes per valori del numero di Mach tali che: $Ma \ll 1$ (*Chen & Doolen, 1998*). In altre parole, la differenza tra le quantità macroscopiche calcolate con il LBM e quelle che si otterrebbero risolvendo l'equazione di Navier-Stokes è trascurabile per valori del numero di Mach tali che: $Ma \ll 1$. La limitazione sul numero di Mach è stata recentemente rimossa, grazie all'adozione di insiemi discreti di PDF opportunamente definiti (*Sun & Hsu, 2003*).

Il LBM è stato applicato con successo anche alla simulazione del trasporto-diffusione di contaminanti (*Shan, 1997*). Un caso interessante di trasporto-diffusione di contaminante è rappresentato da un getto liquido denso, immerso in una corrente liquida più leggera, diretta perpendicolarmente all'asse del getto. Tale configurazione presenta ricadute applicative connesse al rilascio di portate di acque reflue salmastre provenienti da impianti di desalinizzazione e di produzione di energia da osmosi (*Lai & Lee, 2014*).

Il problema è stato esaminato dal punto di vista sperimentale (*Papanicolaou et al., 2008; Lai & Lee, 2014*) e numerico (*Wang et al., 2011; Decrop et al., 2015; Craske & van Reeuwijk, 2015*). L'approccio LBM è stato utilizzato nel caso in cui il getto e la corrente abbiano la medesima densità (*Lei et al., 2015*).

Nel presente si considera un getto realizzato con acqua salmastra immerso in ambiente d'acqua dolce. La differenza di densità tra il fluido ambiente (ρ_0) e il getto (ρ_j) è piccola: ($\rho_0/\rho_j \approx 1$), pertanto può essere adottata l'approssimazione di Boussinesque, secondo cui le variazioni di densità intervengono nel bilancio della quantità di moto esclusivamente tramite il termine della forza di gravità. Negli altri termini del bilancio della quantità di moto, la densità si mantiene costante. Il modello si completa con l'equazione di trasporto-diffusione della concentrazione di sali disciolti nel getto. Il modello di Boussinesque è dunque riformulato nell'ambito del LBM e risolto numericamente, riproducendo configurazioni sperimentali realizzate nel Laboratorio di Ingegneria Costiera (LIC) del DICATECh del Politecnico di Bari. I risultati numerici e sperimentali mostrano una discreta concordanza, almeno a livello qualitativo.

2 IL MODELLO LBM

Il Lattice è costituito da un numero discreto di velocità $\mathbf{c}_i$, definite in ogni punto $\mathbf{P} \equiv (x, y)$ appartenente al dominio fluido e considerate ammissibili per la particella fluida. Nel caso bidimensionale è consuetudine utilizzare un Lattice a nove velocità (Succi, 2001). L'equazione discreta di Boltzmann che governa l'evoluzione della PDF $f_i(x, y, t)$ relativa alla particella che si muove con la i^{ma} velocità è la:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i = \frac{f_i^{eq} - f_i}{\tau^*} + \frac{\mathbf{F}^{ext} \cdot \mathbf{c}_i}{N_c c_0^2} \quad (i = 0, 1, \dots, 8) \quad (1)$$

τ^* è il tempo di rilassamento dimensionale, f_i^{eq} è la PDF di equilibrio associata alla i^{ma} direzione del lattice. $\mathbf{F}^{ext}$ è il vettore delle forze esterne, N_c è una costante intera, che, per il lattice bidimensionale a nove velocità, è pari a 6. Infine c_0 è il modulo della velocità della particella fluida $\mathbf{c}_i$, identico per tutte le direzioni del lattice. Si ha dunque un set di equazioni che possono essere discretizzate e risolte con opportuno algoritmo numerico per determinare il corrispondente set di PDF $f_i(x, y, t)$. La scelta consueta (Succi, 2001) consiste nella rappresentazione lagrangiana della derivata a primo membro della (1):

$$f_i(x + c_{xi}\Delta t, y + c_{yi}\Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, y, t) + \frac{f_i^{eq} - f_i}{\tau^*/\Delta t} + \frac{\mathbf{F}^{ext} \cdot \mathbf{c}_i}{N_c c_0^2} \Delta t \quad (i = 0, 1, \dots, 8) \quad (2)$$

Detto Δs lo spostamento della particella fluida, c_0 è definito tramite la: $c_0 = \Delta s / \Delta t$. Il rapporto $\tau^*/\Delta t$ è definito tempo di rilassamento adimensionale o, semplicemente, tempo di rilassamento. c_{xi} , c_{yi} sono le componenti cartesiane del vettore $\mathbf{c}_i$ ($i=0, 1, \dots, 8$). Infine il vettore delle forze esterne è definito dalla:

$$\mathbf{F}^{ext} = -\rho_0 g \left(1 + \frac{\rho_s - \rho_0}{\rho_0} C \right) \mathbf{j} \quad (3)$$

ρ_s e C ($C=C(x, y, t)$) sono rispettivamente la densità e la concentrazione del sale disciolto nel getto, $\mathbf{j}$ il versore dell'asse verticale, orientato verso l'alto. Infine si devono definire le PDF all'equilibrio f_i^{eq} ($i=0, 1, \dots, 8$). Si assume di solito (Succi, 2001) una espansione in serie della distribuzione di equilibrio di Maxwell-Boltzmann per ciascuna direzione del lattice:

$$f_i^{eq} = \rho_0 w_i \left(1 + 3 \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c_0^2} + 9 \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{c_0^4} - 3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c_0^2} \right) \quad (4)$$

I pesi w_i dipendono dalla direzione. Si ha: $w_0=4/9$, $w_1= w_2= w_3= w_4=1/9$, $w_5= w_6= w_7= w_8=1/36$. L'algoritmo (2), unitamente alla definizione (3) delle forze esterne e alla definizione (4) delle PDF di equilibrio, permette di ottenere le PDF $f_i(x, y, t)$ ($i=0, 1, \dots, 8$) in ogni punto della discretizzazione e in ogni istante. Le grandezze macroscopiche vengono poi ottenute tramite le:

$$\rho_0 = \sum_{i=0,8} f_i, \quad \rho_0 \mathbf{u} = \sum_{i=0,8} f_i \mathbf{c}_i \quad (5)$$

Tali grandezze convergono a quelle che si otterrebbero risolvendo l'equazione di Navier-Stokes con l'approssimazione di Boussinesque al tendere del numero di Mach a zero. In pratica per numeri di Mach piccoli ($Ma \ll 1$) la differenza tra i valori (5) e quelli ottenuti risolvendo l'equazione di Navier-Stokes è trascurabile. È importante osservare che l'equivalenza suddetta è valida attribuendo all'equazione di Navier-Stokes la viscosità cinematica caratteristica (Succi, 2001):

$$\nu^* = \frac{1}{3} c_0^2 \Delta t \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \quad (6)$$

Il LBM si estende anche alla modellazione equivalente dell'equazione di trasporto-diffusione della

concentrazione C . Praticamente si utilizza il medesimo algoritmo (2), senza il vettore forza esterna:

$$\chi_i(x + c_{xi}\Delta t, y + c_{yi}\Delta t, t + \Delta t) = \chi_i(x, y, t) + \frac{\chi_i^{eq} - \chi_i}{\tau_c^*/\Delta t} \quad (i = 0, 1, \dots, 8) \quad (7)$$

La definizione delle PDF all'equilibrio χ_i^{eq} coincide con la (4), in cui al posto della densità di riferimento compare la concentrazione locale ed istantanea C . Quest'ultima viene ottenuta tramite la:

$$C = \sum_{i=0,8} \chi_i \quad (8)$$

La concentrazione C così ottenuta è equivalente a quella che si ottiene risolvendo l'equazione del trasporto diffusione, con una diffusività caratteristica definita dalla:

$$\kappa^* = \frac{1}{3} c_0^2 \Delta t \left(\tau_c^* - \frac{1}{2} \right) \quad (9)$$

3 APPARATO SPERIMENTALE

Lo studio sperimentale trattato nel presente lavoro è stato condotto presso il Laboratorio di Ingegneria Costiera (LIC) del DICATECh del Politecnico di Bari. Esso è costituito essenzialmente da un circuito idraulico di acqua a temperatura ambiente raccolta in un serbatoio in vetroresina circolare fissato sul pavimento, che rappresenta la vasca di alimentazione del getto di densità. In tale serbatoio avviene il mescolamento dell'acqua con quantitativi fissati di sale da cucina (NaCl), per mezzo di aria insufflata in quattro punti diametralmente opposti e sfalsati in altezza. Mediante una pompa della potenza di 1/2 Hp, equipaggiata con un manometro, una chiave di intercettazione a monte ed una valvola di regolazione manuale a valle, l'acqua così salata nel serbatoio sopraindicato viene immessa nel canale principale, fuoriuscendo da un orifizio metallico di sezione circolare con diametro terminale $D = 5$ mm e $D = 10$ mm rispettivamente per le due configurazioni considerate, in condizioni turbolente, garantite da un elevato numero di Reynolds ($Re > 2000$). L'orifizio è posizionato a 10 mm dal fondo, nella sezione assialsimmetrica di un canale rettangolare lungo 15 m, largo 4 m, con una profondità utile di 0.4 m, con pareti in vetro e struttura portante in acciaio, attraversato da un flusso di acqua a temperatura ambiente. Il sistema idraulico a circuito chiuso del canale prevede il pompaggio di acqua raccolta in un ampio serbatoio metallico a valle del canale stesso con una elettropompa centrifuga Flygt installata su una condotta di mandata di diametro 200 mm. La condotta di mandata adduce la portata dal serbatoio di valle al serbatoio di monte del canale, dove il livello dell'acqua è mantenuto costante mediante l'utilizzo di uno sfioratore laterale. L'acqua sfiorata e, dunque, non immessa in canale è riportata nel serbatoio di valle, mediante una condotta di scarico di troppo pieno con un diametro di 250 mm. La portata in canale è valutata attraverso la differenza delle portate misurate con flussometri elettromagnetici sulle condotte di mandata e di scarico, rispettivamente. Attraverso l'uso delle paratoie di monte e di valle del canale il tirante idrico in esso è stato tenuto costante durante entrambe le prove condotte nell'ambito del presente studio, rispettivamente pari a 28 cm e 40 cm, mentre la velocità della corrente è stata mantenuta costantemente pari a circa 0.4 m/s. Due computer di processo con relativi software di controllo sono in grado di gestire le principali grandezze del modello fisico brevemente descritto in precedenza, nonché di controllare tutte le strumentazioni connesse con il canale ed il sistema di generazione dei getti di densità, in modo da ottenere e mantenere costanti le configurazioni fissate.

4 RISULTATI

Il getto denso penetra nella corrente leggera, si mescola con essa, raggiunge il punto di massima elevazione Z_{max} , ricade sul fondo e inizia a propagarsi come una corrente di gravità. Si prendono in considerazione due quantità di rilevante importanza (Gungor & Roberts, 2009): la massima elevazione Z_{max} e la diluizione S del getto, ossia il rapporto della portata del getto Q nel punto considerato alla portata

del getto Q_j in ingresso. In tabella 1 vengono riportate le quantità Z_{max} , S_t , S_i rilevate sperimentalmente e predette tramite le formule empiriche di Lai & Lee (2014) e Gungor & Roberts (2009).

Caso	Quantità	Sperimentale	Numerica	Lai & Lee (2014)	Gungor & Roberts (2009)
1	Z_{max} (m)	0.25	0.21	0.23	0.36
1	S_t	20	20	39	39
1	S_i	-	-	97	97
2	Z_{max} (m)	0.11	0.10	0.10	0.15
2	S_t	6	5	6	6
2	S_i	11	10	16	16

Tabella 1. Grandezze caratterizzanti il getto.

In figura 1 si mostra un'immagine delle linee di livello della concentrazione di sale in una fase avanzata del fenomeno, relativamente al secondo test sperimentale riprodotto in laboratorio.

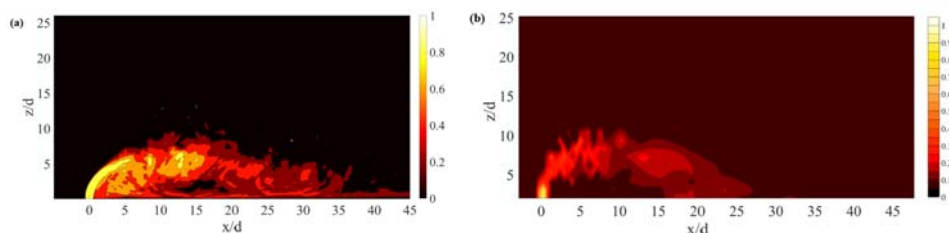


Figura 1. Linee di livello della concentrazione. Caso 2 (a) numerico, (b) sperimentale.

L'accordo, da un punto di vista qualitativo, è buono. Si ritiene pertanto che la formulazione LBM equivalente all'equazione di Navier-Stokes con approssimazione di Boussinesque possa essere applicata allo studio dei getti densi. Il presente lavoro è stato finanziato nell'ambito del progetto di rilevante interesse nazionale PRIN 2010-2011 – Energia idroelettrica da osmosi in ambiente costiero, Responsabile nazionale Prof. Tullio Tucciarelli.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Aidun, C. K. & J. R. Clausen (2010). Lattice-Boltzmann method for complex flows. *Annual review of fluid mechanics* 42, 439–472.
- Chen, S. & G. D. Doolen (1998). Lattice Boltzmann method for fluid flows. *Annual review of fluid mechanics* 30(1), 329–364.
- Craske, J. & M. van Reeuwijk (2015). Energy dispersion in turbulent jets. part 1. direct simulation of steady and unsteady jets. *Journal of Fluid Mechanics* 763, 500–537.
- Craske, J. & M. van Reeuwijk (2015). Energy dispersion in turbulent jets. part 1. direct simulation of steady and unsteady jets. *Journal of Fluid Mechanics* 763, 500–537.
- Decrop, B., T. De Mulder, E. Toorman, & M. Sas (2015). Large eddy simulations of turbidity plumes in crossflow. *European Journal of Mechanics-B/Fluids* 53, 68–84.
- Gungor, E. & P. J. W. Roberts (2009). Experimental studies on vertical dense jets in a flowing current. *Journal of Hydraulic Engineering* 135(11), 935–948.
- Lai, C. C. K. & J. H. W. Lee (2014). Initial mixing of inclined dense jet in perpendicular crossflow. *Environmental Fluid Mechanics* 14(1), 25–49.
- Lei, J., X. Wang, & G. Xie (2015). High performance computation of a jet in crossflow by lattice Boltzmann based parallel direct numerical simulation. *Mathematical Problems in Engineering* 2015.
- Papanicolaou, P. N., I. G. Papakonstantis, & G. C. Christodoulou (2008). On the entrainment coefficient in negatively buoyant jets. *Journal of Fluid Mechanics* 614, 447–470.
- Shan, X. (1997). Simulation of Rayleigh-Benard convection using a lattice Boltzmann method. *Physical Review E* 55(3), 2780.
- Succi, S. (2001). *The lattice Boltzmann equation: for fluid dynamics and beyond*. Oxford: Oxford university press.
- Sun, C. & A. T. Hsu (2003). Three-dimensional lattice Boltzmann model for compressible flows. *Physical review E* 68(1), 016303.
- Wang, R. Q., A. W. K. Law, & E. E. Adams (2011). Pinch-off and formation number of negatively buoyant jets. *Physics of Fluids (1994-present)* 23(5), 052101.